This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

MANUEL

D'APPLICATIONS

MATHÉMATIQUES

USUELLES

ET AMUSANTES.

Ouvrage orné de Figures.

PARIS,

RORET, LIBRAIRE, RUE HAUTEFEUILLE,
AU COIN DE CELLE DU BATTOIR.

Digitized by Google

Digitized by Google

LIBRAIRIE DE RORET,
RUE HAUTEFEUILLE, N° 12, A PARIS.

COLLECTION
DE
MANUELS
FORMANT UNE
ENCYCLOPÉDIE
DES SCIENCES ET DES ARTS.

Format in-18.

Tous les Traités se vendent séparément.

Pour les recevoir franc de port on ajoutera 50 cent. par volume in-18.

Les suivans sont en vente; les autres paraîtront successivement.

Manuel d'Algèbre, par M. Terquem, professeur de mathématiques aux Ecoles royales. Un gros vol. 3 f. 50 c.

Manuel d'Architecture, ou Traité de l'Art de Bâtir, par M. Toussaint, architecte. 2 vol. 7 fr.

Manuel d'Arithmétique démontrée, par M. Collin. Sixième édit. Un vol. 2 fr. 50 c.

Manuel d'Arpentage, ou Instruction sur cet art et sur celui de lever les plans, par M. Lacroix, membre de l'Institut. Un vol. orné de planches. Deuxième édition. 2 fr. 50 c.

Manuel de l'Artificier, contenant les Élémens de la Pyrotechnie civile et militaire; par A. D. Vergnaud, capitaine d'artillerie et ancien élève de l'École Polytechnique. Un vol. orné de planches. 3 fr.

Manuel d'Astronomie, par M. Bailly. Un volume orné de planches. Deuxième édition. 2 fr. 50 c.

Manuel Biographique, ou Dictionnaire historique abrégé des grands Hommes, par M. Jacquelin et M. Noël, inspecteur-général des études; 2 gr. vol.

Digitized by Google

au courant de toutes les Découvertes; le Manuel du Jardinier, *et tous les autres ouvrages de jardinage.*

Manuel du Jongeage et des Débitans de boissons; par MM. Lamadier et D... avocat. Un vol. 3 f.

Manuel des Jeux de Calcul et de Hasard, ou Nouvelle Académie des Jeux; par M. Lebrun. Un gros vol. 3 fr.

Manuel complet des Jeux de Société, renfermant tous les jeux qui conviennent aux jeunes gens des deux sexes; par mad. Celnart. 1 vol. 3 fr.

Manuel du Limonadier et du Confiseur, par M. Cardelli. 4e édition. Un vol. 2 fr. 50 c.

Manuel de la Maîtresse de maison, et de la Parfaite Ménagère, par mad. Gacon-Dufour. Un vol. 2 f. 50 c.

Manuel de Mammalogie, ou Histoire naturelle des Mammifères, par M. Lesson. Un vol. 3 f. 50 c.

Atlas de Mammalogie, composé de 80 planches, représentant la plupart des Animaux décrits dans l'ouvrage ci-dessus. Prix, figures noires. 12 fr.

Figures coloriées. 24 fr.

Manuel des Marchands de Bois et de Charbons, suivi de nouveaux Tarifs du Cubage des bois, etc.; par M. Marié de l'Isle. 1 vol. 3 fr.

Manuel de Mathématiques amusantes, ou nouvelles Récréations mathématiques, par M. Richard. Un gros vol. orné de fig. 3 fr.

Manuel complet de Mécanique, ou Principes élémentaires de cet art. par M. Terquem, professeur aux écoles royales. Un v. 3 fr. 50 c.

Manuel de Médecine et de Chirurgie domestiques; par M. Merin. Deuxième édition. Un vol. 3 fr. 50 c.

Manuel du Menuisier en Bâtimens et en Meubles, suivi de l'Art de l'Ebéniste; par M. Nosban. 2 vol. ornés de planches. 6 fr.

Manuel de Minéralogie, Deuxième édition. Par MM. D. et Julia-Fontenelle. Un vol. 3 fr. 50 c.

Atlas de Minéralogie, composé de 40 planches, représentant la plupart des Minéraux décrits dans l'ouvrage ci-dessus, prix, figures noires. 6 fr.

Figures coloriées. 12 fr.

Manuel de Miniature et de Gouache, suivi du Manuel du Lavis à la Seppia, et de l'Aquarelle, par MM. Constant-Viguier et de Longueville. Un vol. orné de figures. 3 fr.

Manuel du Naturaliste préparateur, par M. Boitard. Un v. 2 f. 50 c.

Manuel d'Ornithologie, ou Histoire naturelle des Oiseaux, par M. Lesson. Deux volumes. 7 fr.

Atlas d'Ornithologie, composé de 129 planches, représentant les oiseaux décrits dans l'ouvrage ci-dessus. Figures noires. 20 fr.

Figures coloriées. 40 fr.

Manuel du Parfumeur, par mad. Gacon-Dufour. Un vol. 2 fr. 50 c.

Manuel du Pâtissier et de la Pâtissière, par la même. Un vol. 2 fr. 50 c.

Manuel du Pêcheur français, ou Traité général de toutes sortes de Pêches; par M. Pesson-Maisonneuve. Un vol. 3 fr.

Digitized by Google

Manuel du Peintre en bâtimens, du Doreur et du Vernisseur, par M. Riffault. Troisième édition. Un vol. 2 f. 50 c.

Manuel de Perspective, du Dessinateur et du Peintre, par M. Vergnaud. Deuxième édition. Un vol. 3 fr.

Manuel de Physique, par M. Bailly. Quatrième édition. Un vol. 2 fr. 50 c.

Manuel de Physique amusante, ou Nouvelles Récréations physiques, par M. Julia-Fontenelle. Un vol. 2e édition. 3 fr.

Manuel du Poêlier-Fumiste, ou Traité complet et simplifié de cet Art, par M. Ardenni. 1 vol. orné de planches. 3 fr.

Manuel du Porcelainier, du Faïencier et du Potier de terre, par M. Boyer. 2 vol. 6 fr.

Manuel pratique des Poids et Mesures, des Monnaies et du Calcul décimal; par M. Tarbé. 13e édit. 1 vol. 3 fr.

Manuel du Praticien, ou Traité de la Science du Droit; par M. D..., avocat. Deuxième édition. Un vol. 3 fr. 50 c.

Manuel du Relieur, dans toutes ses parties, par M. L. Sébastien Lenormand. Un vol. orné de planches. 3 fr.

Manuel du Savonnier, ou l'Art de faire toutes sortes de Savons, par mad. Gacon-Dufour et un professeur de chimie. Un vol. 3 fr.

Manuel du Serrurier, par le comte de Grandpré. Un vol. 3 fr.

Manuel du Tanneur, du Corroyeur, de l'Hongroyeur, par M. Chicoineau. Un vol. 3 fr.

Manuel du Teinturier, suivi de l'Art du Dégraisseur, par M. Riffault. 2e édition. 1 vol. orné de figures. 3 fr.

Manuel du Tourneur, ou Traité complet et simplifié de cet Art, par M. *Dessables*. 2 vol. ornés de planches. 6 fr.

Manuel du Vétérinaire, contenant la connaissance générale des Chevaux, la manière de les élever, de les dresser et de les conduire; par M. Lebeaud. 1 vol. 3 fr.

Manuel du Vigneron français, ou l'Art de cultiver la vigne, de faire les vins et les eaux-de-vie; par M. Thiébaud de Berneaud. 3e édition. 1 vol. 3 fr.

Manuel du Vinaigrier et du Moutardier, par M. Julia-Fontenelle. 1 vol. 3 fr.

Manuel du Zoophile, ou l'Art d'élever et de soigner les animaux domestiques, par mad. Celnart. 1 vol. 2 fr. 50 c.

SOUS PRESSE.

Manuel d'Anatomie.

Manuel de l'Amidonnier et du Vermicellier.

Manuel de l'Armurier-Fourbisseur.

Manuel de l'Art militaire, par M. Vergnaud, cap. d'artillerie.

Manuel de Botanique, deuxième partie, contenant la Flore française, par M. Boïs-Duval.

Manuel du Propriétaire d'Abeilles et de Vers à soie.

Manuel du Bijoutier et de l'Orfévre

Manuel du Bourrelier et du Sellier.

Manuel du Bonnetier et du Fabricant de bas.

Manuel du Bibliophile ou de l'Amateur de livres.

Manuel du Cordonnier.

Digitized by Google

Manuel du Costelier.
Manuel du Chaufournier, ou Traité complet de l'Art de fabriquer la Chaux et le Mortier.
Manuel du Cartonnier et du Cartier.
Manuel du Cocher, suivi de l'Art de former un bon domestique.
Manuel du Carrossier.
Manuel du Constructeur de Machines à vapeur.
Manuel du Chapelier.
Manuel de Conchiologie, ou Histoire naturelle des Coquilles.
Manuel d'Economie politique.
Manuel du Fabricant de Produits chimiques.
Manuel du Fabricant de Papiers peints.
Manuel du Fabricant de Papier.
Manuel du Fabricant de Verre et de Cristal.
Manuel du Facteur d'orgues.
Manuel du Filateur en général.
Manuel du Ferblantier-Lampiste.
Manuel du Fleuriste, ou Traité complet de cet Art.
Manuel des Gardes-chasse, forestier et champêtres.
Manuel de Géographie physique et de Géologie; par MM. Bory de Saint-Vincent et Huot.
Manuel de Gymnastique générale, contenant les arts d'équitation, d'escrime, de natation et de danse, etc., par M. Amoros.
Manuel complet de l'Horloger.
Manuel du Graveur.
Manuel complet de Géométrie, par M. Terquem.
Manuel du Houillier et du Fabricant de Charbon de Terre.
Manuel d'Ichtyologie et d'Erpétologie, ou Histoire naturelle des Poissons et des Reptiles.
Manuel du Layetier et de l'Emballeur.
Manuel du Maître de Forges.
Manuel du Marbrier.
Manuel du Mouleur en plâtre, terre, pâte de Carton, corne, écaille, etc.
Manuel de Musique vocale et instrumentale, par M. Choron.
Manuel de Mnémonique, ou l'Art de seconder la Mémoire.
Manuel de Métallurgie, ou l'Art de tirer les Métaux des mines et de les mettre en œuvre.
Manuel de l'Opticien constructeur d'instrumens de mathématiques, etc.
Manuel du Plombier-Pompier-Fontainier.
Manuel de Physiologie.
Manuel du Propriétaire et du Locataire.
Manuel du Tailleur.
Manuel du Tapissier et du Passementier.
Manuel du Teneur de Livres en partie simple et en partie double.
Manuel du Tonnelier.
Manuel du Trefileur, ou l'Art de faire du Fil de fer, dit d'archal.
Manuel du Voyageur dans Paris.

Digitized by Google

MANUEL

D'APPLICATIONS

MATHÉMATIQUES

USUELLES

ET AMUSANTES;

CONTENANT

Des Problèmes de Statique, de Dynamique, d'Hydrostatique et d'Hydrodynamique, de Pneumatique, d'Acoustique, d'Optique, etc., avec leurs solutions; des Notions de Chronologie, de Gnomonique, de Levé des Plans, de Nivellement, de Géométrie pratique, etc., avec les formules y relatives; plus un grand nombre de Tables usuelles, et terminé par un Vocabulaire renfermant la substance d'un Cours de Mathématiques élémentaires.

PAR T. RICHARD.

PARIS,

RORET, LIBRAIRE, RUE HAUTEFEUILLE,

AU COIN DE CELLE DU BATTOIR.

1828.

Digitized by Google

les flots, fixe le degré de solidité d'un pont de chaînes, nous apprend l'art des constructions durables, et quittant la terre couverte des monumens de sa puissance, monte aux étoiles, mesure et pèse le soleil et les planètes, détermine les lois de leur mouvement, range sous sa domination jusqu'à ces masses de comètes qui nous sont pour ainsi dire étrangères, et nous rapporte de la contemplation du ciel les moyens de mesurer le temps, le mouvement et les grandeurs d'après un système aussi durable que le monde.

Loin d'embrasser tant d'objets, j'ai laissé de côté les théories les plus élevées, j'ai cherché à appliquer la science aux usages les plus familiers, aux besoins de tous les jours et de tous les états; j'ai voulu même que l'agréable se mêlât à l'utile, et, justifiant mon titre de *Manuel d'Applications Mathématiques usuelles et amusantes*, j'ai non seulement consacré des chapitres entiers à l'amusement, tels que celui du calendrier, celui des cadrans solaires, etc., mais encore j'ai accordé plus de développemens aux théories qui ont quelque rapport avec nos plaisirs; on trouvera par exemple dans la dynamique, la théorie du jeu de billard; dans l'acoustique, une méthode pour bien accorder un piano; dans l'optique, le traité des *anamorphoses*, ou de ces projections monstrueuses qui, vues d'un certain point, présentent des figures régulières et dans de justes proportions, etc., etc., etc.

Il m'est impossible de donner même un aperçu de ce que renferme ce petit ouvrage; un coup d'œil sur la table des matières en apprendra plus que tout ce que j'en pourrais dire; quant à l'usage qu'on en peut faire, il est pour ainsi dire sans limite; véritable *Manuel*, c'est un répertoire commode qu'on sera bien aise de consulter au besoin.

Digitized by Google

MANUEL

D'APPLICATIONS MATHÉMATIQUES

USUELLES ET AMUSANTES.

MÉCANIQUE.

PRINCIPES ET DÉFINITIONS.

La *mécanique* est la science du mouvement et de l'équilibre.

On nomme *force* toute cause qui meut ou tend à mouvoir un corps, et il y a *équilibre* quand les forces appliquées à un même corps se détruisent mutuellement.

La *statique* a pour objet l'équilibre des forces appliquées aux corps solides.

Une force unique qui produirait sur un point matériel le même effet que plusieurs forces ensemble se nomme *la résultante* de ces forces, qui en sont alors les *composantes*.

La résultante de deux forces quelconques qu'on représente par des lignes, est en grandeur et en direction, la diagonale du parallélogramme construit sur des droites proportionnelles à ces forces et prises sur leurs directions.

Ce principe nous aidera à résoudre le problème suivant :

Digitized by Google

Problème.

Trouver graphiquement la résultante de plusieurs forces concourant au même point, et agissant dans le même plan.

1°. Soient, par exemple (*fig.* 1), quatre forces A, B, C, D; agissant sur le point P, et représentées en grandeur et en direction par les lignes P A, P B, P C, P D; du point A menez A *b*, parallèle et égale à P B, de *b*, menez *b c*, parallèle et égale à P C, de *c*, menez *c d*, parallèle et égale à P D, et ainsi de suite, jusqu'à ce que toutes les forces soient construites. Joignez P *d*, et P *d* sera en grandeur et en direction la résultante demandée.

Ceci revient, en effet, à trouver la résultante de deux forces A et B, puis à combiner cette résultante avec une troisième force C, pour trouver une deuxième résultante que l'on combinerait de même avec une quatrième force pour trouver une troisième résultante, et ainsi de suite jusqu'à la $(n-1)^{\text{ème}}$ résultante de n forces. Si l'opération est bien faite au moyen d'une échelle bien construite, on approchera facilement de la vraie résultante à $\frac{1}{100}$ près, en ne donnant que des dimensions ordinaires à la figure.

Problème.

Si l'on demandait l'expression de la résultante R de deux forces, au moyen de ces forces F f et de l'angle qu'elles forment A, on aurait en nommant a l'angle formé par R et F

$$R^2 = F^2 + f^2 + 2Ff \cos. A,$$

$$\text{et tang. } a = \frac{f \sin. a}{F + f \cos. A} \text{ ou}$$

$$\sec. a = \frac{f}{F + f \cos. A}$$

Digitized by Google

Deux forces parallèles qui agissent dans le même sens aux deux extrémités d'une verge inflexible peuvent être remplacées par une résultante égale à leur somme.

Si ces forces sont égales, la résultante doit être appliquée au milieu de la verge.

Si elles sont inégales, le point d'application de la résultante partage la verge en deux parties réciproquement proportionnelles aux composantes.

Trois forces F. *f*. *f'*, appliquées à un même point et situées dans des plans différens, ont pour résultante, en grandeur et en direction, la diagonale du parallélipipède construit sur ces forces.

A, B, C, étant les angles formés par les directions des forces F *f*, F*f'*, *ff'*, on a pour l'expression de *cette résultante*

$$R^2 = F + f^2 + f'^2 + 2Ff \cos. A + 2Ff' \cos. B + 2ff' \cos. C.$$

On appelle *moment d'une force* le produit de cette force par la distance de sa direction à un point, à une ligne ou à un plan.

Lorsqu'un corps est assujetti à tourner autour d'un point ou d'une droite par l'effet de certaines forces, il faut, pour l'équilibre, que la somme des momens des forces qui tendent à le faire tourner dans un sens, soit égale à la somme des momens des forces qui tendent à le faire tourner en sens contraire.

DES CENTRES DE GRAVITÉ.

La pesanteur ou la gravité est la force qui sollicite chacune des parcelles de la matière.

Le poids d'un corps est la somme ou la résultante de toutes les actions que la pesanteur exerce sur ce corps. Le poids d'un corps dépend donc de sa *masse*, ou de la quantité absolue de matière dont il est composé.

Digitized by Google

Le centre de gravité d'un corps est le point par lequel passe la résultante de tous les efforts verticaux exercés sur chaque molécule par l'action de la pesanteur, quelle que soit la position de ce corps.

Problème.

Trouver mécaniquement le centre de gravité d'un corps.

Il suffit de le suspendre successivement dans deux positions d'équilibre, à l'aide de fils verticaux appliqués tour à tour à deux points différens; le lieu d'intersection du prolongement de ces fils sera le centre cherché.

Le centre de gravité de tout corps homogène est à son centre de figure.

Le centre de gravité d'une droite est au milieu de sa longueur.

Celui de l'arc de cercle est sur le rayon qui passe par le milieu de l'arc, à une distance du centre qui est une quatrième proportionnelle à la longueur de l'arc, à sa corde et au rayon.

Celui du secteur circulaire, dont c est la corde, a l'arc, et r le rayon, est à une distance du centre

$$= \frac{2cr}{3a}$$

Celui de l'aire du segment de cercle, dont A est la surface et c la corde, est sur le rayon à une distance du centre

$$= \frac{1}{12}\frac{c^3}{A}$$

Celui d'une calotte sphérique est au milieu de l'axe.

Celui du secteur sphérique est sur son axe, à une distance du centre égale aux $\frac{1}{4}$ du rayon, moins les $\frac{1}{8}$ de la hauteur de la calotte.

Celui du paraboloïde est aux $\frac{2}{3}$ de l'axe, à partir

Digitized by Google

du sommet et dans le paraboloïde tronqué dont h est la hauteur, R et r les rayons des bases. Il est situé sur l'axe à une distance de la moindre section

$$= \frac{1}{3} h \frac{2R^2 + r^2}{R^2 + r^2}.$$

Celui du *contour* ou de l'*aire* d'un *parallélogramme* est à l'intersection de ses diagonales; celui de la circonférence ou de l'aire du *cercle*, de la surface ou du volume de la sphère, au centre.

Celui du contour d'un polygone s'obtient en divisant la somme des momens de ses côtés, par rapport à deux axes pris dans son plan par le contour du polygone; les quotiens sont les coordonnées du centre de gravité.

Celui d'un triangle est situé, à partir d'un de ses angles, aux deux tiers de la droite menée du sommet de cet angle, au milieu du côté opposé.

Celui de l'aire d'un polygone s'obtient en le décomposant en triangles.

Celui du cône et de la pyramide est situé aux $\frac{1}{4}$ de la droite menée du sommet au centre de gravité de la base, à partir du sommet.

Le prisme et le cylindre ont leur centre de gravité au milieu de la droite, qui joint le centre de gravité de leurs bases.

Celui du tronc de cône qui a pour hauteur h et pour rayons des bases R et r, est situé sur l'axe à une distance de la moindre base

$$= \frac{1}{4} h \frac{3R^2 + 2Rr + r^2}{R^2 + Rr + r^2}.$$

DES MACHINES ÉLÉMENTAIRES.

DU LEVIER.

Le levier est une verge inflexible droite ou courbe, par le moyen de laquelle une force meut ou tend à

Digitized by Google

mouvoir une autre force, autour d'un point d'appui sur lequel le levier est posé.

Il est de la première espèce, si l'appui est entre la puissance et la résistance (*fig.* 2); de la seconde, si la résistance est entre l'appui et la puissance, et de la troisième, si la puissance est entre l'appui et la résistance.

Dans l'équilibre du levier, la puissance et la résistance sont en raison inverse des distances du point d'appui à leur direction.

Lorsque les forces sont parallèles, la puissance et la résistance sont en raison inverse des bras du levier. Ainsi, dans les *fig.* 1, 2, 3, appelant P la puissance, a la distance de la puissance au point d'appui, R la résistance, b la distance de la résistance au point d'appui, on a toujours

$$P \times a = R \times b,$$

qui donne une de ces quantités lorsqu'on connaît les trois autres.

Quelques problèmes éclairciront ce que ces principes pourraient avoir d'abstrait.

Problème.

Obtenir le poids exact d'un corps avec une balance fausse ou dont les bras du levier sont inégaux.

Appelons l'un des bassins B, l'autre B′, Q le corps dont on veut connaître le poids. Placez ce corps dans le premier bassin B, et observez le poids p qui lui fait équilibre; 2°. transposez le corps Q dans B′, et observez le nouveau poids p' qui lui fait équilibre.

Le poids vrai du corps $= \sqrt{pp'}$.

En effet, puisque *deux puissances qui tendent à faire tourner un levier en sens contraire, et qui se font équilibre, sont en raison réciproque de leurs distances au point d'appui*, si l'on appelle l, l' les longueurs des bras des bassins B, B′, nous aurons les proportions suivantes :

Digitized by Google

$$Q : p :: l' : l \qquad 1^{re} \text{ pesée.}$$
$$Q : p' :: l : l' \qquad 2^{e} \text{ pesée.}$$

d'où l'on tire $Q\,l = p\,l'$ et $Q\,l' = p' \times l$; multipliant ces équations, on a $Q^2\,ll' = p\,p'\,ll'$; divisant les deux membres par $l\,l'$, il vient $Q^2 = p\,p'$, d'où enfin $Q = \sqrt{p\,p'}$.

Problème.

Soit un poids D (*fig.* 3) de 2000 livres qu'on demande d'élever, on donne, à cet effet, un levier de 12 pieds de longueur; l'homme qui doit mouvoir ce poids n'a qu'une force de 30 livres, on demande en quel endroit du levier on doit placer le poids.

Prenant pour inconnue x la distance de la résistance au point d'appui, la quantité a de la formule

$$P\,a = R\,b$$

devient, en réduisant les pieds en pouces, $144 - x$; d'où

$$30\,(144 - x) = 2000\,x, \text{ d'où } x = 2^{\text{pouces}},19.$$

Si donc le poids D est suspendu au levier, à la distance de 2 pouces $\frac{19}{100}$, la puissance soutiendra ce poids; mais en rapprochant un peu D de C, elle pourra le soulever.

Problème.

« Un point d'appui, et je meus la terre », disait Archimède.

On demande en quel point du levier n il eût fallu la placer, en supposant à Archimède une force f, sachant que, d'après les expériences de Cavendish, le pied cube moyen de matière terrestre pèse 385 livres, et que, par conséquent, la masse du globe est de 1,485,885,408,245,287,908,320,000 livres.

Digitized by Google

Problème.

Un homme, et un enfant qui n'a qu'une force de 25 livres, ont à transporter un poids de 270 livres, suspendu à une perche inflexible de 12 pieds de longueur; on demande comment il faudra disposer le fardeau.

Considérant ici l'enfant comme puissance, et l'homme comme point d'appui, et appelant x la distance de l'homme à la résistance, notre formule devient

$$25 \times 144 = 270\,x, \text{ d'où } x = \frac{160}{27} = 13^{\text{pouces}}\,\frac{2}{9}.$$

Le fardeau doit donc être placé à 1 pied 1 pouce et 4 lignes de l'homme.

Lorsqu'un veut avoir égard à la pesanteur du levier, il faut considérer son poids comme une force appliquée verticalement à son centre de gravité.

Problème.

Deux hommes, que nous appellerons Jean et Pierre, portent, de la même manière, à l'aide d'une perche cylindrique homogène, du poids de 14 livres et de 24 pieds de longueur, trois fardeaux de 20, 40 et 35 livres; le premier, à 5 pieds de Jean; le deuxième, au milieu de la perche, et le troisième, à 4 pieds de Pierre. On demande quel poids supportera chaque homme.

Il est d'abord évident que le poids du deuxième fardeau et celui de la perche sont également répartis. Prenant ensuite Pierre pour point d'appui, et Jean pour puissance, notre formule donne,

part de Jean pour le premier fardeau,

$$P \times 24 = 20 \times 19, \text{ d'où } P = 15\,\tfrac{5}{6}$$

pour le troisième fardeau,

$$P \times 24 = 35 \times 4, \text{ d'où } P' = 5\,\tfrac{5}{6}$$

pour la perche et le deuxième fardeau; 27

Total..... $48\,\frac{2}{1}$

La résultante des poids étant 109, on a, pour la part de Pierre, $109 - 48\frac{2}{3} = 60\frac{1}{3}$.

DE LA POULIE ET DES MOUFLES.

La poulie est une roue dont la circonférence est creusée en gorge pour recevoir un cordon; elle est traversée par un axe dont les extrémités entrent dans les yeux d'une chape.

La poulie est fixe quand la chape est attachée à un point fixe; seule elle n'a d'autre avantage mécanique que de changer la direction de la puissance; elle ne diminue en rien l'effort du poids par rapport à la puissance qui le fait mouvoir, et même, comme il n'y a point de machine sans frottement, on peut dire que pour faire mouvoir un poids par le moyen d'une *poulie fixe*; il faut un peu plus de force que si on le tirait immédiatement.

La poulie est mobile quand la chape est liée à la résistance et se meut avec elle.

Dans l'équilibre de la poulie fixe ou mobile, les forces appliquées à la corde ou les forces tangentielles sont égales, et si R est le rayon de la poulie, C la charge que supporte l'axe, S la sous-tendante de l'arc enveloppé par le cordon, P l'une des forces tangentielles, on a

$$P : C :: R . S.$$

Si les cordons sont parallèles, S est alors le diamètre de la poulie, et l'on a en faisant $R = 1$

$$2P = C$$

ou la pression sur l'axe égale à deux fois la puissance.

Soit une force F soutenant un poids P, au moyen d'un système de poulies mobiles de rayons $r. r'. r''$.... embrassées chacune par un cordon attaché d'une part à un point fixe, et de l'autre à la poulie voisine; soit en outre $s. s'. s''$, les sous-tendantes des arcs enveloppés, on a dans l'équilibre

Digitized by Google

$$\frac{F}{P} = \frac{r \times r' \times r'' \ldots}{s \times s' \times s'' \ldots}$$

Si les cordons sont parallèles, n étant le nombre de poulies, notre formule devient

$$\frac{F}{P} = \frac{1}{2^n}.$$

Un moufle est un système de poulies assemblées dans une même chape, sur le même axe ou sur des axes particuliers. On emploie ordinairement deux moufles, l'un attaché à la puissance, et l'autre lié au poids; toutes ces poulies sont embrassées par une même corde dont un des bouts est attaché à un des moufles, et l'autre est tiré par la puissance.

Si F est la force, P le poids, a a' a''.... les angles que font avec la verticale les cordons qui vont d'un moufle à l'autre, on a dans l'équilibre

$$F = \frac{P}{\cos. a + \cos. a' + \cos. a'' \ldots}.$$

Si les cordons sont parallèles et en nombre n, alors

$$F = \frac{P}{n}.$$

DU TOUR, TREUIL OU CABESTAN.

Le tour est composé d'un cylindre horizontal ou vertical, mobile autour de son axe, et sur lequel s'enveloppe un cordage au bout duquel est attaché un poids qu'on veut approcher de la machine. Ce poids est mu par des puissances appliquées à l'extrémité d'un ou plusieurs leviers fixés perpendiculairement à l'axe du cylindre.

Digitized by Google

On a pour la condition d'équilibre, P étant la puissance, R la résistance ou le poids, r le rayon du cylindre, plus le demi-diamètre de la corde qui s'enroule, l la longueur du levier comptée depuis l'axe du cylindre,

$$Pl = Rr.$$

Le *cric* est composé d'une barre de fer dentée d'un côté et retenue par une clape, dans laquelle cette barre est mobile dans le sens de sa longueur; les dents de la barre engrènent avec celles d'un pignon qu'une puissance fait tourner au moyen d'une manivelle.

L'équation précédente s'applique aussi à cette machine, en faisant $r =$ le rayon du pignon, et $l =$ celui de la *circonférence* que la manivelle tend à *mouvoir*.

Il est des crics dont on augmente la force en faisant *engrener* les dents du pignon avec celles d'une roue, et les dents du pignon de cette roue avec celles de la barre, alors rr' étant les rayons des pignons $l\,l'$, ceux de la roue et de la manivelle, on a

$$P\,ll' = R\,rr',$$

et généralement si l'on conçoit un système de roues et de pignons successifs, de rayons $l\ l'\ l''\ l'''\ldots$ $r\ r'\ r''\ r'''\ldots$, on aura toujours

$$P\,ll'l''l'''\ldots = R\,rr'r''r'''\ldots.$$

Problème.

On demande le rapport de la puissance au poids pour un système semblable, les roues et les pignons étant au nombre de cinq, et ayant pour rayons les premières 9, 6, 9, 10 et 12 pouces, et les pignons chacun 3 pouces, on

$$\frac{P}{R} = \frac{3\times3\times3\times3\times3}{9\times6\times9\times10\times12} = \frac{1}{240}.$$

Digitized by Google

Problème.

Ce théorème s'applique aussi aux vitesses imprimées. Veut-on connaître quelle vitesse V sera imprimée à la dernière roue dans un système de 6 roues et de 6 pignons, dont les rayons seront dans le rapport de 10 à 1, appelant v la vitesse du premier pignon, on aurait

$$\frac{v}{V} = \frac{1}{10^6} = \frac{1}{1000000}$$

c'est-à-dire que la dernière roue se mouvrait avec une vitesse un million de fois plus grande que le premier pignon.

Nous avons confondu le cabestan et le tour, parce qu'en définitive la théorie est la même; nous devons cependant ajouter qu'on adapte le plus souvent au tour un tambour dans lequel on fait marcher des hommes qui agissent par leur pesanteur.

Ainsi (*fig.* 4). H S B A étant le tambour, si l'on fait marcher un homme à l'intérieur, et qu'il fasse effort pour s'avancer vers H, K, S, lorsqu'il sera arrivé en H ou en K, la ligne de pesanteur sera H O, K E, et il agira comme s'il était suspendu en O, E etc... ; en B sa force sera la plus grande possible.

Et en général, plus l'angle que sa position formera avec l'horizontal D B sera petit, plus sa force aura d'action, car son bras de levier augmentera comme le cosinus de cet angle.

Cela posé, on propose le problème suivant.

Problème.

Dans l'intérieur du tambour d'un tour à 30 degrés de l'horizontale C B, en S par exemple, se trouve un homme pesant 135 livres; au dehors, en A, agit pareillement par son poids un autre homme pesant 116.91 livres. Le rayon de la roue du tour

Digitized by Google

est égal à 20 pieds, et celui du cylindre est de 18 pouces.

On demande, 1°. de quel côté tournera la machine;

2°. Quel contrepoids P chacun de ces hommes pourra équilibrer, suivant qu'ils agiront en S ou en B?

Cherchons d'abord la longueur du bras de levier de l'homme en S.

Le cosinus de l'angle de 30 degrés dans le cercle dont le rayon est 1, est 0.866025

Pour le cercle de rayon..... 20

On a..... 17.32...

C'est la longueur du bras de levier.

Multipliant par le poids de l'homme = 135

Le moment est de..... 2338.2

On a pour l'autre moment $116.91 \times 20 = 2338.2$

Différence..... 0

Les momens sont égaux; partant, il y a équilibre, la machine ne tournera ni d'un côté ni de l'autre.

La formule $Pl = Rr$ résoudra tous les autres cas, et l'on trouvera

que l'homme de 116.91 livres, placé en B, équilibrera..... 1558.8

que le même, en S, équilibrera..... 1349.92

l'homme de 135 livres, en B..... 1800..

le même, en S..... 1558.8.

DU PLAN INCLINÉ.

Un corps qui ne touche au plan qu'en un point ne peut demeurer en équilibre qu'autant que les forces qui agissent sur lui peuvent se réduire à une seule, dirigée au point de contact perpendiculairement au plan.

Soit une puissance F, retenant un poids P sur

2

Digitized by Google

un plan incliné, a l'angle d'inclinaison du plan avec l'horizon, b celui de la direction de la puissance avec le plan, on a pour l'équilibre

$$F.\cos b = P.\sin a,$$

ou bien encore, h étant la hauteur du plan, l sa longueur

$$F\,l = P\,h.$$

Si R désigne la pression sur le point d'appui, B la base du plan, on a

$$R = \frac{PB}{l} = \frac{P\cos c}{\cos b}$$

c étant l'angle que fait la direction de la puissance avec l'horizontale.

Si la direction de la puissance est horizontale, ces formules deviennent

$$F.B = P\,h \text{ et } R = \frac{P\,l}{B}.$$

Un corps pesant ne peut être en équilibre entre deux plans inclinés (*fig.* 5), que lorsqu'il ne trouve, dans la verticale qui passe par le centre de gravité du corps un point F, tellement situé, que de ce point on puisse abaisser, sur chaque plan, une perpendiculaire qui ne laisse point, d'un même côté, tous les points de contact du corps avec le plan. Il faut, en outre, que ces perpendiculaires soient dans un même plan.

Appelant P le poids du corps, R sa pression sur B, R′ celle sur BD, a l'angle ABD, b l'angle DBI, c l'angle ABH, on a

$$\frac{P}{\sin a} = \frac{R}{\sin b} = \frac{R'}{\sin c}.$$

Digitized by Google

Application.

Soit $c = 30°$, $b = 60°$, on a $a = 90°$; les sinus des trois angles sont entre eux comme 100, 86.6 et 50 ; le poids du corps est 100 livres, la pression sur A B sera 86.6, et sur B D, 50.

Problème.

Un homme cherche à faire monter un baril de 150 livres sur la longueur d'un plan dont la base est 10 pieds et la hauteur $7\frac{1}{2}$; il se sert pour cela d'une corde qui enroule le baril ; on demande quelle force il devra employer pour le maintenir à la même place, en tirant parallèlement au plan.

Nous ferons remarquer d'abord que

$$l = \sqrt{(B^2 + h^2)} = \sqrt{156.25} = 12.5$$

notre formule $F l = P h$ devient alors $12.5 \times F = 150 \times 7.5 = 1125$, d'où

$$F = \frac{11250}{125} = 90 \text{ livres}$$

pour l'effort total ; mais la corde tirée par l'homme étant retenue par une de ses extrémités à un point fixe, l'effort de l'homme ne serait que la moitié de ce nombre ou 45 livres.

Problème.

Une échelle homogène, inflexible et symétrique, de 30 pieds de longueur et du poids de 90 livres, est appuyée obliquement contre un mur vertical ; la distance du pied de l'échelle au mur est de 18 pieds ; on demande quelle est l'action de la pesanteur perpendiculairement à la direction de l'échelle et au milieu, on a

Digitized by Google

$$R = \frac{PB}{l} = \frac{96 \times 18}{30} = 54 \text{ livres.}$$

Problème.

Un homme du poids de 124 livres se place sur l'échelle à une longueur de 10 pieds, à partir de sa base, quelle sera l'action perpendiculaire à la direction de l'échelle?

$$R = \frac{124 \times 18}{30} = 74.4 \text{ livres.}$$

Problème.

Enfin les circonstances restant les mêmes, quelle sera la pression de l'échelle sur le mur vertical?

La pression de l'échelle sera de	27
Celle de l'homme (voyez *levier*).	24.8
Pression totale.	51.8

Problème.

Etant donné un poids de 1000 livres, placé sur la longueur d'un plan incliné, et une puissance de 50 livres agissant parallèlement à sa longueur, on demande quel angle ce plan devra former avec l'horizon pour qu'il y ait équilibre entre les deux forces?

F cos. b = P sin. a. Ici l'angle b est o puisque la direction de la force est parallèle au plan; donc F cos. b = F. (*Voyez* la table, au mot *trigonométrie*.)

$$\sin. a = \frac{F}{P} = \frac{50}{1000}$$

log. F est	1.6989700
complément log. P	7.0000000
log. sin. a	8.6989700

Digitized by Google

a ou l'angle demandé est donc 2° 52′ à peu de chose près.

Problème.

Etant donné un plan incliné de 30 degrés à l'horizon, avec un poids de 800 livres sur sa longueur, on demande quel effort il faudra employer pour faire monter ce poids en agissant parallèlement au plan?

F cos. b = P sin. a se réduit comme dans l'exemple précédent à F = P sin. a = 800 sin. 30° = 800 × 0.5 = 400 livres. C'est la force qui maintiendrait ce poids; pour peu qu'on l'augmentât, il s'avancerait sur le plan.

DE LA VIS.

La *vis* est un cylindre droit, à la surface duquel adhère un *filet* ou corps saillant qui fait partout un même angle avec la génératrice du cylindre. Le *pas* de la vis est l'intervalle compris entre deux filets consécutifs, mesuré parallèlement à l'axe du cylindre.

Dans les usages de la vis on emploie toujours l'action d'une puissance qui tourne autour de l'axe du cylindre par le moyen d'un levier, comme dans le treuil.

F étant cette puissance, R la résistance, d le pas de la vis, c la circonférence décrite par la puissance appliquée au levier, on a pour l'équilibre

$$\frac{F}{R} = \frac{d}{c}.$$

Cette formule montre que l'avantage mécanique, en théorie, est d'autant plus grand, que la circonférence c est plus grande ou que le pas de la vis est plus petit.

Si l'on suppose que la roue d'un treuil soit dentée, et que ses dents engrènent avec les filets d'une vis

Digitized by Google

qu'une puissance fait tourner au moyen d'une manivelle, on aura une idée de la *vis sans fin*.

On a pour l'équilibre, dans cette machine, F étant la puissance, P la résistance ou le poids, d le pas de la vis, r le rayon du cylindre de la vis, c la circonférence décrite par la puissance, R le rayon de la roue,

$$\frac{F}{P} = \frac{d \times r}{c \times R}.$$

DU COIN.

La théorie du coin est à peu près sans usage; nous ne la donnons ici que pour compléter le recueil de ce qu'on trouve sur les machines élémentaires dans tous les ouvrages de mécanique.

L'équilibre dans le coin exige la relation suivante :

$$\frac{P}{P} = \frac{t}{h}$$

P étant la puissance qui frappe le coin, R la résistance qu'il éprouve pour séparer les parties du corps entre lesquelles il est interposé, t la tête du coin, h la hauteur du coin.

L'avantage mécanique d'une machine composée se détermine en analysant ses parties. Par exemple, si m à 1, n à 1, r à 1, s à 1, sont les avantages séparés, le produit $m \times n \times r \times s$ à 1 sera l'avantage du système.

Problème.

Si l'on demandait quelle charge une puissance de 30 livres pourrait élever au moyen d'une machine composée d'une manivelle, d'un pignon, d'une roue et d'un moufle triple, le rayon de la manivelle étant 6, celui du pignon 1, celui de la roue 10 fois celui du cylindre sur lequel elle tourne, on obtient, au moyen des formules précédentes,

Digitized by Google

$$30 \times 6 \times 10 \times 6 = 10800 \text{ livres.}$$

Tel est le poids que la puissance pourrait élever, en faisant toutefois abstraction du frottement, qui altère considérablement les relations que nous avons données, et pour l'influence duquel nous devons renvoyer aux traités spéciaux.

QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS AUX CONSTRUCTIONS.

De l'épaisseur à donner aux murs de revêtemens pour qu'ils résistent à l'effort ou à la poussée des terres qu'ils soutiennent.

x étant cette épaisseur au sommet, h la hauteur du mur, n le rapport entre la base et la hauteur du talus du parement extérieur, n' la même quantité pour le parement intérieur, t la tangente de la moitié de l'angle qui fait le talus naturel (1) des terres à soutenir avec la verticale, p la pesanteur spécifique des terres, P celle de la maçonnerie, on a

$$x = h\left[-(n+\tfrac{1}{2}n') + \sqrt{\frac{pt^2}{3P}}\right]$$

Si les deux talus du mur sont égaux, la formule devient

$$x = h\left[-\tfrac{1}{2}n + \sqrt{\frac{pt^2}{3P}}\right]$$

(1) On appelle talus naturel la pente que prennent les terres nouvellement remuées et mises les unes au-dessus des autres, sans être battues ni retenues par aucun fascinage. L'angle de cette pente avec l'horizon est d'autant plus aigu que les terres sont moins fortes.

Digitized by Google

Problème.

Avec les mêmes données que dans le problème précédent, on demande l'épaisseur à donner au sommet du mur, en lui supposant un talus extérieur dont la base est 9 pouces ou 0,75 d'un pied, on a

$$\frac{0.75}{15} = 0.05 = n \text{ et } x = h\left[-n + \sqrt{\frac{pt^2}{3P}}\right]$$

devient $x = h\,[-0.05 + 0.414 \times 0.51] = h\,(0.2070 - 0,05) = h \times 0.157 = 15 \times 0.157 = 2$ pieds 0.355.

Problème.

Les mêmes données que dans le problème précédent, excepté qu'il y a de plus un talus à l'intérieur égal à celui extérieur.

$$x = h\left(-\frac{3}{2}n + \sqrt{\frac{p\,t^2}{3P}}\right) = h \times 2132$$

Quelques ingénieurs emploient des formules qui diffèrent sensiblement de celles que nous avons données d'après M. de Prony ; les résultats qu'on en déduit étant favorables à la solidité, nous les présenterons ici sans applications. Appelant R notre rapport $\sqrt{\frac{p}{3P}}$, afin de simplifier les expressions, T le talus naturel des terres avec la verticale, on a

pour les murs rectangulaires.....	$x = h$ sin. T. R
murs avec talus extérieur.....	$x = h$ sin. T $- nh$
murs avec talus intérieur et extérieur..	$x = h$ sin. T $-\left(n + \frac{n'}{2}\right) h$

Digitized by Google

et l'on a pour les limites assignées par l'expérience, $T = 90°, 60°, 45°, 30°$, et pour la valeur des sinus correspondans $\sin. T = 1.00, 0.866, 0.707, 0.50$.

RÉSISTANCE DES CORDES.

D'après les expériences de Duhamel, d étant le diamètre d'une corde, elle supporte moyennement $d^2 \times 400$ kilogrammes.

D'après Coulomb, les cordes blanches portent jusqu'à 50 ou 60 kilogrammes par fil de caret; mais on ne doit jamais les charger de plus de 40 kilogrammes. Les cordes goudronnées ne portent que les $\frac{2}{3}$ ou les $\frac{1}{4}$ des cordes blanches.

DE LA RÉSISTANCE OU DE LA FORCE DES BOIS.

Nous présenterons d'abord deux tables qui faciliteront nos calculs, et qui sont le résultat moyen d'expériences faites avec soin par Buffon et autres.

LONGUEUR en pieds.	GROSSEUR EN POUCES.				
	4 POUCES.	5 POUCES.	6 POUCES.	7 POUCES.	8 POUCES.
	livres.	livres.	livres.	livres.	livres.
7	5312	11525	18950	32200	47649
8	4550	9787	15525	26050	39750
9	4025	8308	13150	22350	32800
10	3612	7125	11250	19475	27750
12	2987	6075	9100	16175	23450
14	»	5100	7475	13225	19775
16	»	4350	6362	11000	16375
18	»	3700	5562	9425	13200
20	»	3225	4950	8275	12487

Digitized by Google

Ces expériences ont été faites sur le chêne. C'est ce bois qui nous servira de terme de comparaison; on connaîtra le rapport de sa force à celui des autres bois par la table suivante :

BOIS.	FORCE HORIZONTALE.	FORCE VERTICALE.	FORCE ABSOLUE.	POIDS d'un pied cube en livres.
Alisier.....	1142	1468	2104	61 1/2
Aune.....	644	780	2680	46
Bouleau.....	853	861	1980	49 1/2
Charme.....	1034	1622	2189	53 1/2
Châtaignier....	957	950	1944	48
Chêne commun.	1000	807	1821	63 1/2
Erable.....	1094	843	2094	44
Frêne commun.	1072	1112	1800	55
Hêtre.....	1032	986	2480	50 1/2
Mélèze.....	843	902	1460	46
Merisier.....	916	952	1589	50
Noyer.....	900	753	1120	47 1/2
Orme.....	1077	1075	1980	51 1/2
Peuplier.....	586	680	940	29
Pin.....	882	804	1041	43
Poirier.....	850	816	1680	50
Sapin.....	918	851	1250	38
Tilleul.....	750	717	1407	39 1/2
Tremble.....	624	717	1293	»

Digitized by Google

DE LA FORCE HORIZONTALE.

F étant le poids sous lequel une pièce placée horizontalement est près de rompre, on a coutume de prendre $\frac{F}{10}$ pour la charge qu'on peut lui faire porter sans danger de rupture. Cette force est donnée pour le chêne dans la table première.

Problème.

Si l'on demandait, par exemple, quel poids pourrait supporter en son milieu une solive de 18 pieds de long sur 8 pouces d'équarrissage, on trouverait dans la colonne 8 pouces et sur la ligne 18 pieds, le poids *13,200 livres*; c'est la réponse à la question.

Il est bon de faire remarquer que cette charge, placée *au milieu* des solives, équivaut à une charge *double* qui serait également répartie sur toute la longueur.

Si l'on appelle n le rapport de la force d'un autre bois que le chêne à celle du chêne (rapport donné par la table 2), on aura

$n\,F$ = la charge sous laquelle il romprait.

$\frac{n\,F}{10}$ = celle que la pièce peut supporter en son milieu sans danger de rupture.

$\frac{n\,F}{5}$ = celle qu'elle pourrait supporter, pourvu que cette charge fût uniformément répartie sur toute la longueur.

Problème.

Faisons l'application de cette formule au problème précédent, la solive étant de sapin.

Nous avons trouvé pour F de chêne, dans la première table, 13,200.

Digitized by Google

La seconde table donne $n = \frac{918}{1000}$

D'où l'effort sous lequel elle romprait ou n F = 12,117 livres

Et la charge qu'elle peut porter sans danger en son milieu 1,211 livres

Et pour celle uniformément répartie sur sa longueur, sans danger de rupture, 2,442 livres

DE LA FORCE VERTICALE.

Les bois debout diminuent de force lorsqu'ils commencent à plier. La force moyenne du chêne, qui est de 44 livres par ligne carrée sur un cube, se réduit à

$\frac{2}{6}$ pour (la base étant 1) une hauteur.... 12
$\frac{1}{3}$ pour..... 24
$\frac{1}{4}$ pour..... 36
$\frac{1}{6}$ pour..... 48
$\frac{1}{12}$ pour..... 60
$\frac{1}{24}$ pour..... 72

Nous devons ajouter que la force verticale du chêne donnée dans la table 2, qu'on trouve être 807, est pour 18 lignes en superficie.

Cela posé, pour avoir la force verticale F d'un poteau, par exemple, dont on connaît la base et la hauteur, on cherchera le rapport du côté de sa base à sa hauteur, et l'on trouvera dans la petite table qui précède la fraction correspondant à la force verticale; fraction que nous appelons r, et l'on aura pour le chêne, B étant le nombre de lignes carrées de la base

$$F = r \times \frac{B \times 807}{18} = \text{la plus grande charge}$$

qu'il puisse porter avant de se rompre.

Digitized by Google

$F = r \times \frac{B \times 807}{180}$ = celle qu'il peut supporter sans risque.

Problème.

On demande la force verticale d'un poteau de chêne dont la base est 9 pouces en carré et la hauteur 9 pieds. On trouve, pour le rapport du côté de la base à la hauteur,

$$\frac{9 \times 12}{9} = 12, \text{ d'où } r = \frac{5}{6}$$

$B = (9 \times 12)^2 = 11{,}664$ lignes carrées, d'où

$$F = \frac{5}{6} \times \frac{11664 \times 807}{18} = 435780$$

et pour F′ = la plus grande charge, sans danger de rupture, 43,578 livres.

S'il s'agissait de calculer la force verticale de tout autre bois compris dans la table 2, on chercherait, par les formules précédentes, la valeur de F ou F′ pour le chêne, en lui donnant les dimensions du bois en question, et on multiplierait ce résultat par R, R étant le rapport de la force verticale du bois à celle du chêne, c'est-à-dire qu'on aurait

$$F = R r \times \frac{B \times 807}{18}$$

$$\text{et } F' = r R \times \frac{B \times 807}{180}$$

Problème.

En donnant donc à un poteau de sapin les dimensions du problème précédent, on trouverait

Digitized by Google

$$R = \frac{851}{807}$$

$$\text{et } F = \frac{5 \times 851 \times 11664 \times 807}{6 \times 18 \times 807} = \frac{5 \times 851 \times 11664}{6 \times 18}$$

$$= 459540$$

et pour $F' = 45954$ livres.

DE LA FORCE DES BOIS INCLINÉS.

Pour avoir la charge φ que peut supporter une pièce de bois inclinée, on cherchera, par les formules précédentes, sa force verticale F ou F′, en ayant égard à ses dimensions, et l'on aura cette relation :

$\varphi = F \cos. a =$ la plus grande charge.
$\varphi' = F' \cos. a =$ celle dont on peut la charger sans danger de rupture.

a étant l'angle qui fait sa direction avec l'horizontale.

Problème.

On demande quelle charge pourra supporter une pièce de chêne de 9 pieds de longueur, inclinée à l'horizon de 60° ; sa grosseur est de 8 pouces.

Le rapport du côté de la base à la hauteur $= \frac{12 \times 9}{8} = 13.5$; nous avons approximativement $r = \frac{5}{6}$ et $B = 9216$. Partant, $F = r \times \frac{B \times 807}{18}$ devient $F = \frac{5 \times 9216 \times 807}{6 \times 18} = \frac{37186560}{108} = 344320$,

et $\varphi = 344320 \times \cos. 60° = 344320 \times 0.5 = 172160$; et pour φ' 17216.

Digitized by Google

Les cosinus se prennent dans le cercle dont le rayon est 1.

Nous devons prévenir que les résultats donnés par ces formules diffèrent un peu de ceux donnés par l'expérience. Nous allons y joindre celles que M. Navier a données dans le *Traité des Ponts* de Gauthey, en ajoutant qu'elles diffèrent aussi des résultats de Buffon.

Soit c, la distance entre les appuis en mètres,

b, l'épaisseur verticale en mètres,

a, l'épaisseur horizontale en mètres,

Q kilogrammes le poids qui peut faire fléchir une pièce verticale,

P kilogrammes celui dont on peut charger une pièce horizontale, on a pour le chêne

$$Q = (20336845 + 21017476.\ b.c.)\ \frac{a\,b^2}{c^2}$$

il suffira donc, pour les pièces verticales, de rester au-dessous de cette limite ; puis

$$P = (158250 + 163546.\ b.c.)\ \frac{a\,b}{c}$$

f étant la longueur en mètres de la flèche de courbure que peut prendre une pièce sous l'effort d'un poids qui la charge sans danger de rupture.

$$F = 0.0004\ \frac{c^2}{b}$$

Problème.

On demande de calculer d'après ces formules quel poids pourra supporter en son milieu une pièce horizontale de $5^m,846$ de longueur sur 0.1353 d'équarrissage, on a $a = b = 0.1353$ et $c = 5.846$.

Digitized by Google

Si p était 10 kilogrammes, par exemple, cette tension décuplerait.

Problème.

Les conditions restant les mêmes, on demande quelle sera la longueur de la chaîne.

$$\tfrac{1}{2}S = \frac{A \sin. \alpha}{p} \text{ devient}$$

$$\tfrac{1}{2}S = 329.218 \times 0.3090 = 101.728362,$$

d'où S = longueur de la chaîne = 203.456.

Problème.

Enfin, si l'on voulait connaître la flèche, on aurait

$$f = \tfrac{1}{2}S\left(\frac{1 - \cos. \alpha}{\sin. \alpha}\right) = 101.73 \times \frac{489}{3090}$$

$$= 101.73 \times 0.15 = 16^{m}.10.$$

Des équations données, on tire cette nouvelle valeur de A, ou de la tension

$$A = \frac{pS}{2 \sin. \alpha} = \frac{pf}{1 - \cos. \alpha}.$$

Quand la flèche ne dépasse pas le dixième de la distance des points d'appui, on peut remplacer la chaînette par l'arc de cercle qui aurait les mêmes tangentes extrêmes. Appelant R le rayon de ce cercle, on a

$$R = \frac{d^2 + 4f^2}{8f}.$$

Digitized by Google

formule qui servira à trouver la valeur de α, qui est

$$\text{tang.}\,\alpha = \frac{d}{\sqrt{(2R+d)(2R-d)}}.$$

La table suivante donne les relations entre les différentes parties de la courbe, et facilitera la résolution des problèmes qu'on pourrait se proposer. Outre $p = 1$ on a pris pour unité la force horizontale, appliquée au point le plus bas de la courbe, et capable de maintenir la moitié de la courbe dans sa position, si l'autre moitié ne lui faisait point équilibre; Q étant cette force, on a la relation

$$Q = A \cos. \alpha;$$

il faudrait donc multiplier les nombres de la table par A cos. α, pour avoir leur valeur dans les cas où Q n'est pas égal à 1; ainsi donc, si l'on voulait résoudre le dernier problème au moyen de la table, on chercherait le nombre f qui correspond à l'angle de 18°. C'est en 0.05146 qui, multiplié par A cos. α =329.21+0.9511=313.111, donne 0.05146×313.111 =16.11, ou à un centième près, ce que nous avons trouvé.

Angle de suspension.	f	$\frac{1}{2}d$	$\frac{1}{2}S$	A	$\frac{1}{2}\frac{d}{f}$
1° 0′	.00015	.01745	.01745	1.0001	114.586
2 0	.00061	.03491	.03492	1.0006	57.279
3 0	.00137	.05238	.05241	1.0014	38.171
4 0	.00244	.06987	.06993	1.0024	28.613
5 0	.00382	.08738	.08749	1.0038	22.874
6 0	.00551	.10491	.10510	1.0055	19.046
7 0	.00751	.12248	.12278	1.0075	16.309
8 0	.00983	.14008	.14054	1.0098	14.254

Digitized by Google

Angle de suspension.	f	$\frac{1}{2}d$	$\frac{1}{2}S$	A	$\frac{\frac{1}{2}d}{f}$
9° 0′	.01247	.15773	.15838	1.0125	12.654
10 0	.01543	.17542	.17633	1.0154	11.372
11 0	.01872	.19318	.19438	1.0187	10.820
12 0	.02234	.21099	.21256	1.0223	9.444
13 0	.02630	.22887	.23087	1.0263	8.701
14 0	.03061	.24681	.24933	1.0306	8.062
15 0	0.3528	.26484	.26795	1.0353	7.508
16 0	0.4030	.28296	.28675	1.0403	7.021
17 0	.04569	.30116	.30573	1.0457	6.591
18 0	.05146	.31946	.32492	1.0515	6.208
19 0	.05762	.33786	.34433	1.0576	5.863
20 0	.06418	.35637	.36397	1.0642	5.553
21 0	.07114	.37502	.38386	1.0711	5.271
22 0	.07853	.39376	.40403	1.0786	5.014
23 0	.08636	.41267	.42447	1.0864	4.778
24 0	.09484	.43169	.44523	1.0946	4.562
25 0	.10338	.45087	.46631	1.1034	4.361
26 0	.11260	.47021	.48773	1.1126	4.176
28 0	.13257	.50940	.53171	1.1326	3.843
30 0	.15470	.54930	.57735	1.1547	3.551
32 4	.18004	.5912	.62649	1.1800	3.284
34 16	.21003	.6371	.68130	1.2100	3.034
36 52	.24995	.6932	.74991	1.2499	2.773
39 11	.29011	.7443	.81510	1.2901	2.567
41 44	.34004	.8029	.89201	1.3400	2.362
44 0	.39016	.8566	.96569	1.3902	2.196
46 1	.43999	.9066	1.0361	1.4400	2.060
48 11	.49981	.9623	1.1178	1.4998	1.925
50 8	.56005	1.0142	1.1974	1.5800	1.811
52 9	.62973	1.0706	1.2869	1.6297	1.699
54 13	.71021	1.1304	1.3874	1.7102	1.592
56 28	.81021	1.1995	1.5089	1.8102	1.481
58 3	.88972	1.2510	1.6034	1.8897	1.416
60 0	1.0000	1.3169	1.7321	2.0000	1.317
64 6	1.2894	1.4702	2.0594	2.2894	1.140
67 28	1.6095	1 6135	2.4102	2.6095	1.002
67 32	1.6168	1.6164	2.4182	2.6168	0.9998

Digitized by Google

DYNAMIQUE.

La dynamique a pour objet l'étude du mouvement des corps solides.

Les cinq élémens, qui entrent dans les lois du mouvement sont la force motrice, F, la masse M, l'espace E, le temps T et la vitesse V.

La force motrice s'estime en multipliant la masse du corps par la vitesse imprimée à ce corps; c'est ce qu'on appelle sa quantité de mouvement, ou Q, d'où

$$Q = MV$$

La masse d'un corps est la quantité de matière qui le compose. Les masses M, M' des corps sont proportionnelles à leur poids p p'

$$\text{ou } \frac{M}{M'} = \frac{p}{p'}$$

La vitesse d'un corps est l'espace que ce corps parcourt uniformément pendant un temps quelconque pris pour unité. (*Voyez* plus bas ce qu'on entend par *mouvement uniforme*.)

Quand une même force agit sur des mobiles différens, elle leur imprime des vitesses qui sont en raison inverse de leurs masses.

Les forces motrices sont entre elles comme les quantités de mouvement qu'elles produisent.

Ces forces, pour des masses égales, sont entre elles comme les vitesses qu'elles impriment;

Et pour des vitesses égales, elles sont entre elles comme les masses sur lesquelles elles agissent.

La densité d'un corps, ou son poids sous un volume donné, est égale au rapport de son poids à son volume, donc

Digitized by Google

A volume égal, les densités des corps sont proportionnelles à leur poids;

A poids égal, les densités sont en raison inverse des volumes.

En général, les densités sont comme le rapport direct des poids, multiplié par le rapport inverse des volumes.

Le poids d'un corps est égal à son volume, multiplié par sa densité.

Le volume d'un corps est égal à son poids, divisé par sa densité.

On distingue les mouvemens d'un corps en uniforme, accéléré ou retardé.

Le mouvement uniforme est celui d'un point matériel qui parcourt des espaces égaux en temps égaux; on a alors la relation

$$E = VT$$

Les mouvemens, uniformément accélérés ou uniformément retardés, sont ceux qui croissent ou décroissent par degrés égaux, ou bien encore ceux dans lesquels les espaces parcourus croissent ou décroissent à chaque instant successif d'une même quantité.

Les relations suivantes s'appliquent à tous les cas du mouvement, uniformément accéléré par l'action d'une force constante f (g désigne la gravité, dont nous donnerons la valeur); t est le temps qui s'est écoulé depuis le départ du mobile, v la vitesse qu'il a acquise après le temps t, et e l'espace qu'il a parcouru dans le même temps.

$$e = \frac{1}{2} tv = gft^2 = \frac{2gf}{v^2}$$

$$v = \frac{2e}{t} = gft = \sqrt{2gfe}$$

Digitized by Google

$$t = \frac{2e}{v} = \frac{v}{gf} = \sqrt{\frac{e}{\frac{1}{2}gf}}$$

$$f = \frac{v}{gt} = \frac{2e}{gt^2} = \frac{v^2}{2ge}$$

Dans les mouvemens de cette nature, il suffit de connaître le rapport de la force f à la gravité pour calculer ensuite l'espace, le temps ou la vitesse, et réciproquement, connaissant l'espace parcouru dans un temps donné, ou la vitesse acquise à la fin de ce temps, on obtient les valeurs de f.

Quand la gravité agit librement, comme, par exemple, lorsqu'un corps tombe suivant une verticale dans le vide, les relations deviennent

$$e = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v^2}{2g} = \frac{1}{2}tv$$

$$v = gt = \frac{2e}{t} = \sqrt{2ge}$$

$$t = \frac{v}{g} = \frac{2e}{v} = \sqrt{\frac{2e}{g}} = \sqrt{\frac{e}{\frac{1}{2}g}}$$

$$g = \frac{v}{t} = \frac{2e}{t^2} = \frac{v^2}{2e}$$

g, ou ce qu'on appelle la gravité, représente les vitesses que la force accélératrice imprime au mobile pendant l'unité de temps; g est donc un espace, une longueur. Des expériences faites à Paris, au moyen des oscillations du pendule, ont donné

$g = 9^m.808672$ ou en pieds 30.19546

log g... 0.9916103..... 1.4799416

Digitized by Google

pour la vitesse que la pesanteur donne à un corps pendant la première seconde de sa chute dans le vide ; mais cette valeur, dépendant de l'attraction terrestre et de la force centrifuge, varie avec elles ;

elle est au pôle.... $= 9^m.805472\ (1 + 0.002837)$
à l'équateur $= 9^m.805472\ (1 - 0.002837)$

et en un lieu quelconque, au niveau des mers, à la latitude λ, on a, en la désignant par g'

$$g' = 9^m.805472\ (1 - 0.002837 \cos 2\lambda)$$

l'aplatissement de la terre étant $\frac{1}{295}$.

Enfin, si le corps, au lieu d'être simplement soumis à la pesanteur, était projeté verticalement de haut en bas, ou de bas en haut, avec une vitesse donnée a, on aurait

$$e = ta \pm \tfrac{1}{2} g t^2$$

Le signe — s'emploie pour la projection ascendante, et le signe + pour la projection descendante.

Nous allons maintenant appliquer ces formules à la solution de quelques problèmes, dans lesquels nous considérerons toujours le corps comme se mouvant dans le vide et à la latitude de Paris.

Problème.

Combien de temps un corps mettra-t-il à tomber de 400 mètres ?

$$\text{ou } t = \sqrt{\frac{e}{\frac{1}{2}g}} = \sqrt{\frac{400}{4.902}} = 9.03139$$

Ce corps emploiera donc un peu plus de 9″.

Problème.

Quelle sera la vitesse de ce corps à la fin de sa chute ?

$$v = gt = 9.809 \times 9.03. = 88.588.$$

Digitized by Google

Problème.

On laisse tomber un corps pesant dans un précipice ; il ne parvient au fond qu'au bout de 7" : on demande la profondeur du précipice.

$e = \frac{1}{2} g t^2$ donne $e = 4.904 \times 49 = 240^m.3$.

C'est la profondeur demandée.

Problème.

De quelle hauteur faut-il qu'un corps tombe pour acquérir une vitesse de 400^m. par seconde ?

$$e = \frac{v^2}{2g} = \frac{(400)^2}{19.618} = \frac{160000}{19.618} = 8156 \text{ mètres.}$$

Dans les questions où une bien grande exactitude n'est point nécessaire, on fait la gravité = 10 au lieu de 9.81 : alors *la vitesse acquise est en mètres* dix fois le nombre de secondes.

On pourra s'exercer sur quelques problèmes du même genre au moyen de la table suivante :

Digitized by Google

TABLE *de la Chute des Corps dans le vide.*

TEMPS en secondes.	ESPACES PARCOURUS en mètres.	ESPACES PARCOURUS en pieds.	VITESSES ACQUISES en mètres.	VITESSES ACQUISES en pieds.
1/2	1.226	3.78	4.904	15.1
1	4.904	15.10	9.809	30.2
1 1/2	11.035	33.97	14.713	45.3
2	19.618	60.39	19.618	60.4
2 1/2	30.662	94.36	24.522	75.5
3	44.140	135.88	29.426	90.6
3 1/2	60.079	184.94	34.331	105.7
4	78.470	241.57	39.235	120.8
4 1/2	99.314	305.73	44.140	135.9
5	122.610	377.45	49.044	151.0
5 1/2	148.358	456.71	53.948	166.1
		toises. pieds.		pieds.
6	176.558	90—3.5	58.853	181.2
6 1/2	207.211	106—1.9	63.767	196.3
7	240.316	123—1.8	68.662	211.4
7 1/2	275.873	141—3.3	73.566	226.5
8	313.882	161—0.3	78.470	241 6

Problème.

Si l'on demandait quel temps emploierait un corps pesant à tomber du sommet du Panthéon, élevé de 78m.464 au-dessus du pavé. On chercherait dans la table le nombre qui approche le plus de 78.464 : c'est 78.470. Le temps correspondant est 4″. C'est la réponse à la question.

Digitized by Google

Problème.

Un mobile a reçu de bas en haut une impulsion capable de lui communiquer 44 mètres de vitesse par seconde : on demande à quelle hauteur il s'élevera en 4″.

$$e = ta - \frac{1}{2} g t^2 \text{ devient} = 44 \times 4 - 4.904 \times 16$$

$$= 176 - 78.464 = 97^{m}.536.$$

Afin de compléter la théorie de cette espèce de mouvement, nous ajouterons à l'équation

$$e = at - \frac{1}{2} g t^2 \quad \text{celle } v = a - gt,$$

dans laquelle v exprime la vitesse après le temps t. Elle montre que gt croissant avec le temps t, la vitesse v décroît sans cesse ; elle sera nulle, c'est-à-dire le corps cessera de monter quand on aura

$$a = gt,$$

et alors il se sera écoulé un temps $= \frac{a}{g}$, le mobile ayant parcouru un espace ou ayant atteint une hauteur

$$e = \frac{a^2}{2g}.$$

Arrivé là, il retombe avec des vitesses toujours croissantes ; ainsi *un mobile pesant tombé verticalement, ne met pas plus de temps à monter qu'à descendre, et la vitesse qu'il acquiert en revenant est celle qu'il avait en allant.*

Problème.

Si l'on voulait connaître la vitesse qu'avait le corps

Digitized by Google

du problème précédent après les 4 secondes d'ascension, on obtiendrait

$$v = a - gt = 44 - 9.81 \times 4 = 44 - 39.24 = 4^m.76.$$

L'élévation à laquelle il parviendrait est donnée par

$$e = \frac{a^2}{2g} = \frac{(44)^2}{19.61} = \frac{1936}{19.61} = 99^m. + \ldots$$

DU MOUVEMENT SUR LES PLANS INCLINÉS.

Lorsqu'un point matériel est abandonné sur un plan incliné à l'action de la pesanteur, la force accélératrice à laquelle il est soumis est

$$\frac{h}{l} = \sin i,$$

h étant la hauteur du plan, l sa longueur, et i l'angle qu'il fait avec l'horizon. L'on a en outre

$$1 \ldots \quad e = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin i = \frac{v^2}{2g \sin i} = \tfrac{1}{2} tv$$

$$2 \ldots \quad v = gt \sin i = \sqrt{(2ge \sin i)} = \frac{2e}{t}$$

$$3 \ldots \quad t = \sqrt{\frac{2e}{g \sin i}} = \frac{2e}{v}$$

et si a est la vitesse avec laquelle ce corps est projeté sur le plan de bas en haut ou de haut en bas

$$4 \ldots \quad v = a \mp gt \sin i$$

$$5 \ldots \quad e = at \mp \tfrac{1}{2} gt \sin i = \frac{a^2 - v^2}{2g \sin i}$$

Digitized by Google

En faisant $v = o$ dans des équations 4 et 5, la première donnera le temps auquel le corps cessera de monter, et la seconde l'espace qu'il aura parcouru.

Problème.

Un corps est projeté de bas en haut sur un plan incliné dont la hauteur est 12 pieds et la longueur 193 pieds avec une vitesse de 20 pieds par seconde, à quelle distance s'élevera-t-il sur le plan ?

$$e = \frac{a^2 - v^2}{2g \sin i} = \frac{a^2 - v^2}{2g \times \frac{h}{l}} \text{ devient } \frac{400 - 0}{60.4 \times \frac{12}{193}}$$

$$= \frac{400}{\frac{724.8}{193}} = \frac{77200}{7240} = 106.8$$

Problème.

Etant donné un plan incliné de 30 degrés, on demande quel chemin aura parcouru, au bout de 8 secondes, une sphère qu'on laisse rouler sur la longueur de ce plan.

$$e = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin i \text{ devient} = 15.1 \times 8^2 \times \sin 30^\circ$$
$$= 966.4 \times 05 = 483^{\text{pieds}}.2$$

Problème.

Combien de temps emploierait cette sphère à parcourir, sur le même plan, un espace de 879 pieds ?

$$t = \sqrt{\frac{2e}{g \sin i}} \text{ devient} = \sqrt{\frac{879}{7.55}}$$
$$= \sqrt{(116.4)} = 10''.7$$

Problème.

On demande le temps qu'emploierait un même

Digitized by Google

corps à descendre successivement le long des cordes d'un cercle vertical, qui partiraient toutes de l'extrémité supérieure d'un diamètre vertical aussi.

Comparons entre elles deux cordes quelconques, AB, AC. (*Fig.* 6.)

L'équation 1 donne pour AC:

$$AC \text{ ou } e' = \tfrac{1}{2} g t'^2 \sin i', \text{ et pour } AB,$$
$$AB \text{ ou } e = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin i;$$

mais $AB = AD \sin i$, et $AC = AD \sin i'$. Substituant ces valeurs dans nos équations, on obtient

$$\left.\begin{array}{l} AD \sin i' = \tfrac{1}{2} g t'^2 \sin i' \\ AD \sin i = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin i \end{array}\right. \text{ ou } \left\{\begin{array}{l} AD = \tfrac{1}{2} g t'^2 \\ AD = \tfrac{1}{2} g t^2 \end{array}\right.$$

$$\text{ou enfin } \left\{\begin{array}{l} t'^2 = \dfrac{AD}{\frac{1}{2} g} \\ t^2 = \dfrac{AD}{\frac{1}{2} g} \end{array}\right.$$

Par conséquent $t^{2\prime} = t^2$, d'où $t' = t$.

Or, ce raisonnement est applicable à toutes les cordes qui partent du point A; on en conclut que *toutes ces cordes, ainsi que le diamètre vertical, sont parcourus dans un même temps.*

Problème.

On demande le rapport des temps employés par deux corps pesans à parcourir les longueurs de deux plans inclinés. Mettant $l\ l'$ dans l'équation 1 et $\frac{h}{l}\ \frac{h'}{l'}$ pour $\sin i$, on a

$$l = \tfrac{1}{2} g t^2 \times \frac{h}{l} \qquad l' = \tfrac{1}{2} g t'^2 \times \frac{h'}{l'}, \text{ d'où}$$

$$t^2 = \frac{l^2}{\frac{1}{2} g h} \quad \text{et} \quad t'^2 = \frac{l'^2}{\frac{1}{2} g h'}, \text{ d'où}$$

Digitized by Google

$$t = \frac{l}{\sqrt{\frac{1}{2}gh}} \qquad t' = \frac{l}{\sqrt{\frac{1}{2}gh'}}, \text{ d'où enfin}$$

$$\frac{t}{t'} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h'}}$$

c'est-à-dire que *ces temps sont entre eux comme les longueurs des plans divisées par les racines carrées de leurs hauteurs.*

Problème.

En supposant qu'on laisse tomber au même instant deux sphères égales de l'angle supérieur d'un plan incliné de 36 pieds de hauteur et 48 pieds de base, on demande quel chemin parcourra l'un de ces mobiles sur la longueur, tandis que l'autre tombera verticalement de sa hauteur.

Le temps que l'un des mobiles mettra à tomber verticalement étant $t = \sqrt{\frac{2e}{g}}$, il faut substituer cette valeur dans l'équation 1.

Elle devient, en appelant e' l'espace parcouru sur le plan incliné,

$$e' = \frac{g}{2} \times \frac{2e}{g} \times \frac{h}{l} = \frac{e^2}{l}, \text{ parce qu'ici } e = h;$$

et comme

$$l = \sqrt{b^2 + h^2}; \quad e' = \frac{e^2}{\sqrt{b^2 + e^2}} = \frac{(36)^2}{\sqrt{(48)^2 + (36)^2}}$$

$$= \frac{1296}{\sqrt{3600}} = \frac{1296}{60} = 21\text{po.}6.$$

Digitized by Google

La formule $e' = \frac{e^2}{\sqrt{b^2 + e^2}}$ pourra servir à résoudre tous les cas semblables.

Problème.

On a laissé tomber deux boules semblables de l'angle supérieur d'un autre plan incliné; on sait que l'un de ces mobiles a tardé deux secondes pour tomber verticalement de la hauteur du plan, et que pendant ce même temps l'autre a parcouru sur la longueur du plan un espace de 24 pieds.

Quelle était la longueur du plan?

$e = \frac{\frac{1}{2} g t^2 h}{l}$ donne, en se rappelant que $h = \frac{1}{2} g t^2$

$e = \frac{\frac{1}{2} g^2 t^4 . l}{l}$, d'où $l = \frac{\frac{1}{2} g^2 t^4}{e} = \frac{16 \times 228}{24}$

$= \frac{2 \times 228}{3} = \frac{456}{3} = 152$ pieds.

Problème.

Un point étant donné et une ligne qui n'est pas horizontale, on demande à trouver la position du plan incliné, par lequel un mobile, partant du point donné et roulant le long du plan, parviendra à cette ligne dans le moindre temps.

Soit A (*fig.* 7) le point donné, et BC la droite; menez du point A la verticale AD, et la perpendiculaire AE à la ligne donnée; du point D, où la verticale rencontre cette même ligne, menez DG parallèle à AE et égale à AD; enfin, tirez AG qui coupera BC en F, la ligne AF sera la position du plan par lequel un mobile arrivera à la ligne BC dans un temps moindre que par tout autre plan incliné.

Digitized by Google

En effet, tirez FH parallèle à AE ou DG jusqu'à sa rencontre en H, avec la verticale AD, les triangles semblables donnent

$$AD : DG :: AH : HF,$$

et puisque $DG = AD$, $HA = HF$, qui est d'ailleurs perpendiculaire à BG; donc le cercle décrit du point H comme centre et d'un rayon égal à AH, passera par F, et touchera la droite BC. Or, puisque toutes les cordes d'un cercle sont parcourues dans le même temps que le diamètre vertical, le temps employé à tomber le long de AI est égal à celui qui est employé à tomber le long de AF; conséquemment celui qu'il faudra pour rouler le long de AD ou AE, sera plus long que celui qu'il faudra pour rouler le long de AF.

Le même raisonnement s'appliquant à toutes les autres lignes qu'on pourrait tirer de A à la ligne BC, il s'ensuit que AF est le chemin par lequel le mobile arrivera dans le moindre temps à la droite BC.

Si BC était verticale, alors AE et DG seraient horizontales; enfin, AD et DG deviendraient égales et infinies, ce qui donnerait l'angle $FAD = 45^o$, d'où il résulte que le plan incliné qui conduirait à la verticale dans le moindre temps est celui de 45^o.

L'on a fait abstraction, dans tous ces problèmes, du frottement et de la résistance de l'air.

BALISTIQUE.

Problème.

Connaissant la vitesse initiale V d'un globe, trouver ce que la résistance de l'air lui fait perdre après qu'il a parcouru un espace donné x, ou sa vitesse restante u.

Digitized by Google

a est le diamètre du projectile, D sa densité; celle de l'air étant prise pour unité, on a

$$\log u = \log V - \frac{9x}{20\,D\,a}$$

faisant $c = \frac{20\,D\,a}{9}$, et appelant m un nombre dont le logarithme est

$\frac{x}{c} \times 0{,}434294\,48$ (*voyez* la table), on a

pour la vitesse restante

$$\log u = \log V - \log m.$$

Problème.

Connaissant la vitesse qu'un globe conserve après avoir parcouru un espace donné, trouver la vitesse qu'il avait au commencement de cet espace, ou sa vitesse initiale; ce problème est l'inverse du précédent; l'on a donc

$$\log V = \log m + \log u.$$

Problème.

Connaissant la vitesse initiale V d'un globe, trouver le temps t qu'il met à parcourir un espace donné x,

on a $$t = \frac{c}{V}(m - 1)$$

Problème.

Connaissant le temps qu'un globe met à parcourir un espace donné, trouver sa vitesse initiale; ce problème est l'inverse du précédent, on a donc

$$t = \frac{c}{V}(m - 1)$$

Digitized by Google

Problème.

Connaissant la vitesse initiale V d'un globe, le temps de son mouvement t, trouver l'espace parcouru x pendant ce temps.

$$m = \frac{V t}{c} : + 1 .$$

La table suivante est destinée à faciliter le calcul des problèmes précédens. Il faut se rappeler que m est un nombre dont le logarithme est

$$\frac{x}{c} \times 0{,}43429448$$

BOULETS DE	DIAMÈTRES en pieds.	DENSITÉS.	LOGARITHMES de $\frac{20 D a}{9} = c$	LOGARITHMES (1) de $\frac{1}{c} \times 0.43429448$
36	0.52141		3.8486626	5.7891217
24	0.45370		3.7882520	5.8495323
18	0.41222		3.7466146	5.8911697
16	0.39699	6991.1	3.7302628	5.9075215
12	0.36053		3.6884246	5.9493597
8	0.31539		3.6303311	6.0074532
6	0.28588		3.5896670	6.0501173
4	0.25000		3.5294232	6.1083611
Balles	0.05092	9755.1	3.0429601	6.5948242

Applications.

Un boulet de 24 est chassé avec une vitesse initiale de 1200 pieds : on demande la vitesse qui lui reste après avoir parcouru 900 pieds.

(1) On a ajouté 10 aux caractéristiques de ces logarithmes.

Digitized by Google

$\log \frac{1}{c} \times 0.434 \ldots\ldots$	5.8495323
$\log (x = 900) \ldots\ldots$	2.9542425
$\log \frac{x}{c} \times 0.4342 \ldots\ldots$	8.8037748

dont le nombre 0.0636465 doit se retrancher de
$\log (V = 1200)$. 3.0791812

il reste log u..... 3.0155347 qui répond à 1036.4 : donc, au bout de 900 pieds, la vitesse du boulet n'est plus que d'environ 1036 pieds.

Problème.

Un boulet de 24, arrivé à un but éloigné de 900, a besoin d'une vitesse de 1036 pieds pour produire son effet; on demande la vitesse initiale nécessaire. Notre formule donne pour ce cas, qui est l'inverse du précédent :

m	0.0636465
$\log u$	3.0153598
$\log V$	3.0790063, qui répond à 1199.52, ou à très-peu près 1200 pieds.

Problème.

Le même boulet est chassé avec la même vitesse initiale : on demande le temps qu'il met à parcourir un espace de 900 pieds.

on a $\log m$ 0.0636465
$m = 1,157835$
donc $m - 1 = 0.157835$

$\log (m-1)$	9.1982034
$\log c$	3.7882520
complément $\log V$	6.9208188
$\log t$	9.9072742

d'où $t = 0'',808$, ou environ $\frac{8}{10}$ de seconde.

Digitized by Google

Problème.

On demande la vitesse initiale d'un boulet de 16, sachant qu'il a parcouru 1290 pieds en 1″ 25.

On fera l'opération suivante :

pour le boulet de 16, $\log \frac{1}{c} \times 0.434 = 8.9075215$

$\log (x = 1290) = 3.1105897$

$\log \frac{x}{c} \times 0.434 = 9.0181112$

d'où $\log m = 0.1075584$

d'où $m = 1.27138$

et $m - 1 = 0.27138$

	$\log (m - 1)$	9.4334978
	$\log c$	3.7302628
complément	$\log (t = 1''.25)$	9.9030900
	$\log V$	3.0668506

d'où $V = 1166.4$; telle est la vitesse initiale cherchée.

Problème.

On demande l'espace parcouru en trois quarts de seconde par un boulet de 16 chassé avec une vitesse initiale de 1200 pieds par seconde.

	$\log (V = 1200)$	3.0791812
	$\log (t = 0.75)$	9.8750613
complément	$\log c$	6.2697872
	$\log \frac{Vt}{c}$	9.2239797

dont le nombre $\frac{Vt}{c}$ est 0.167487

donc $m = \frac{Vt}{c} + 1 = 1.167487$

Digitized by Google

$$\log m = \frac{x}{c} \times 0.434 \quad 0.0672521$$

$$\log \frac{x}{c} \times 0.434\ldots \quad 8.8277058$$

$$\log c \quad 3.7302628$$

$$\text{compl}^{s}.\ \log 0.434 \quad 0.3622157$$

$$\log x \quad 2.9201843 \quad \text{d'où } x = 832 \text{ pieds.}$$

Toutes ces formules peuvent servir utilement à déterminer les circonstances du tir de but en blanc, c'est-à-dire celui qui s'exécute en dirigeant la ligne de mire sur l'objet qu'on veut atteindre.

La ligne de mire naturelle est le rayon visuel qui rase la partie supérieure de la plate-bande de culasse, et le point le plus élevé du bourrelet.

La ligne de mire artificielle est celle qui passe par la visière de la hausse, et le point le plus élevé du renflement de la volée. On appelle hausse une targette mobile dans une coulisse pratiquée derrière la culasse, et qui peut être fixée à une certaine hauteur au moyen d'une vis de pression. A la partie supérieure est une entaille qui sert de visière.

Si par la pensée on prolonge l'axe de la pièce et la ligne de mire, on conçoit que ces lignes se rencontreront à une distance déterminée par les dimensions de la pièce. L'angle qu'elles forment se nomme *angle de mire :* nous le désignerons par I, et si nous appelons l la longueur de l'axe de la pièce, r et R étant les demi-diamètres à la volée et à la culasse, et H la hausse, on obtiendra I par

$$\text{tang I} = \frac{\text{H} + \text{R} - r}{l} \quad \text{ou} \quad \frac{\text{R} - r}{l} \quad \text{si H} = 0,$$

c'est-à-dire si l'on ne fait point usage de la hausse. $\frac{\text{R} + r}{l} = \text{tang I}$ est alors ce qu'on appelle *l'angle de mire naturel* de la pièce.

Digitized by Google

On appelle *angle de projection* celui formé par l'horizontale avec l'axe de la pièce ; l'on aura, avec assez d'exactitude, la relation entre cet angle p et la hauteur de la hausse par

$$H = 4 \operatorname{tang} p - (R - r)$$

toutes les fois que la pièce sera peu inclinée à l'horizon.

Problème.

On veut atteindre de but en blanc un but éloigné de 2160 pieds avec une pièce de 24, et sous l'angle de mire naturel de cette pièce qui est de 1° 15′ 6″ : on demande la vitesse initiale avec laquelle le boulet doit être chassé.

Tous les cas semblables sont résolus par

$$V = \sqrt{\frac{15.1}{\operatorname{tang} I}\left(\frac{x^2}{c} + x\right)}$$

Pour l'exemple dont il s'agit :

log x^2 ...	6.6689076
compl. log c	6.2117480
log $\frac{x^2}{c}$	2.8806556 donc $\frac{x^2}{c}$ = 759.72
	x = 2160. »
	$\left(\frac{x^2}{c} + x\right)$ = 2919.72 qui
a pour logarithme.	3.4653412
log 15 1	1.1789769
compl. log tang I.	1.6605648
	6.3048829
log V =	3.1524414 d'où V = 1420.5

Le boulet de 24 doit donc avoir une vitesse initiale de 1420 pieds par seconde.

Digitized by Google

Problème.

Sous quel angle de mire faut-il tirer une pièce de 16 placée à 1932 pieds d'un but que l'on veut frapper de But en blanc, le boulet ayant une vitesse initiale de 1412 pieds par seconde?

On se servira pour tous les cas semblables de

$$\text{tang I} = \frac{15.1}{V^2}\left(\frac{x^2}{c} + x\right)$$

Ici $\log x^2$ . . 6.5720142
compl. $\log c$. . 6.2697372

$\log \frac{x^2}{c}$ 2.8417514 d'où $\frac{x^2}{c} = 694.63$

$x = 1932$

$\frac{x^2}{c} + x = 2626.63$ qui

a pour log... 3.4193988
log 15.1..... 1.1789769
compl. log V^2 3.7003306

log tang I.... 8.2986063 donc angle de mire est 1° 8′ 20″.

Problème.

Connaissant les dimensions de la pièce, quelle hauteur faut-il donner à la hausse pour obtenir cet angle de mire?

Reprenons pour cela la formule donnée plus haut.

$$\text{tang I} = \frac{H + R - r}{l}$$

d'où l'on tire $H = l \text{ tang I} - (R - r)$.

Pour les pièces de 16, on a $R = 7^{\text{pouces}}.90$, et $r = 5.65$; d'où $(R - r) = 2.25$ $l = 113^{\text{pouces}}.18$;

Digitized by Google

or, log l..... 2.0537697
log tang. I... 8.2987063
log l tang I... 0.3524760 dont le nombre est 2.25, il faut en retrancher (R — r) qui est aussi 2.25

donc H = $\frac{0}{b}$ c'est-à-dire qu'il ne faut point employer la hausse; en effet, 1° 8′ 20″ est l'angle de mire naturel de la pièce de 16.

Problème.

On demande la portée du but en blanc naturel d'une pièce de 24, la vitesse initiale du boulet étant de 1420 pieds par seconde, et l'angle de mire naturel 1° 15′ 6″. On se sert pour le calcul de tous les *cas semblables de*

$$x = c\left[\sqrt{\left(\frac{V^2 \text{ tang } I}{(15.1)^2 \times c} + \frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2}\right]$$

Ici log V^2..... 6.3045766
log tang I.... 8.3394352
compl. log 15.1..... 8.8210231
compl. log c..... 6.2117480

log $\frac{V^2 \text{ tang } I}{15.1 \times c}$ 9.6767829 dont le nombre est..... 0.475097

on ajoute $\frac{1}{4}$ ou.... 0.25

0.725097 dont le logarithme est 9.8603961; prenant la moitié

on a log $\sqrt{\left(\frac{V^2 \text{ tang } I}{15.1 \times c} + \frac{1}{4}\right)}$ = 9.9301980 dont

le nombre est 0.85152

on ôte $\frac{1}{2}$ ou 0.5

reste ..... 0.35152 dont le log. est 9.5459500
log c 3.7882520
log x 3.3342020

d'où $x = 2158'8$. Telle est la portée du but en blanc.

Pour compléter ces notions de balistique, il faut savoir comment on parvient à mesurer la vitesse initiale des projectiles.

Problème.

Mesurer la vitesse initiale des projectiles.

On forme à cet effet une espèce de pendule qu'on appelle *pendule balistique*, et qui se compose d'une grande masse de bois ou de métal suspendue par une barre de fer. La suspension de ce pendule pesant est ajustée pour qu'il oscille avec aussi peu de frottement qu'il est possible. On tire contre cette masse; le projectile y pénètre à une certaine profondeur, et partage avec elle tout le mouvement qui l'anime. La masse est poussée d'une certaine quantité, d'après laquelle on juge de la vitesse qu'elle a reçue. (*Voyez* Pendule, Choc des corps.)

D'après les expériences de Hutton, dont on doit une excellente traduction à l'auteur du *Manuel d'Algèbre* de notre collection, M. Terquem, c étant le poids de la charge de poudre, b celui du boulet, on a pour la vitesse initiale en pieds

$$V = 1501.3\sqrt{\frac{2c}{b}}$$

DU PENDULE.

On appelle pendule tout corps suspendu à un point fixe, autour duquel il peut tourner; le pendule serait *simple* s'il se composait d'un fil inextensible et

Digitized by Google

sans pesanteur, à l'extrémité duquel on imaginerait *une seule* molécule de matière pesante. Ce pendule *idéal* est facile à concevoir, mais impossible à construire ; tout pendule qui n'est point simple ou semblable au précédent, s'appelle pendule composé. Les propriétés fondamentales du pendule sont, 1°. de marquer la direction de la pesanteur; 2°. de faire des oscillations planes et sensiblement isochrones, quand on l'écarte de cette direction et qu'on l'abandonne à lui-même sans lui donner aucune impulsion.

Soit l la longueur du pendule simple, g la gravité en un lieu donné, t la durée d'une oscillation en secondes sexagésimales, π le rapport 3.14159... du diamètre à la circonférence, on a pour de très petits arcs

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{d'où} \quad g = \frac{\pi^2 l}{t^2}$$

Si l' est la longueur d'un autre pendule situé en un lieu où la gravité soit g' et le temps d'une oscillation t', on a entre ces deux pendules la relation

$$t : t' :: \sqrt{\frac{l}{g}} : \sqrt{\frac{l'}{g'}}$$

Si la gravité est la même, c'est-à-dire pour le même lieu, ce rapport devient

$$\frac{t}{t'} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{l'}}$$

n et n' étant les nombres d'oscillations faites dans la même durée, on a

$$t : t' :: n' : n \text{ et } n' : n :: \sqrt{l} : \sqrt{l'}$$

Si un même pendule est placé dans deux lieux différens, dont la gravité soit g g', on a

Digitized by Google

$$t : t' :: \sqrt{\frac{1}{g}} : \sqrt{\frac{1}{g'}} :: g' : g$$

Enfin, si les oscillations de deux pendules sont égales dans les lieux g g'

$$g : g' :: l : l'$$

Si les arcs ne sont pas infiniment petits, et que v désigne le sinus verse de l'angle d'une demi-oscillation, la relation suivante remplace la première formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{8} v + \frac{9}{256} v^2 + \ldots\right)$$

On peut négliger le troisième terme de la série lorsque l'amplitude de la demi-oscillation n'excède pas 4 à 5 degrés.

On déduit de la formule précédente que si le temps d'une oscillation dans un arc infiniment petit est de 1″, l'accroissement de temps pour

un demi-arc de 30° sera de..	0.01675
de 15°.....	0.00496
de 10°.....	0.00190
de 5°.....	0.00012
de 2° ½.....	0.00003

de sorte que pour des oscillations de 2° ½ de chaque côté de la verticale, l'augmentation ne donnerait pas plus de 9″ en un jour.

A Paris, dans le vide, l ou la longueur du pendule simple qui bat la seconde sexagésimale de temps moyen à l'Observatoire, c'est-à-dire à 70 mètres au-dessus du niveau des mers, est

		logarithmes correspondans
$l =$ 0.9938267	mètres.	$\log =$ $\bar{1}$.9973106
3.059439	pieds.	0.4856419...
36.71327	pouces.	...1.5648232...
440.5593	lignes.	2.6440044

Digitized by Google

N étant le nombre d'oscillations que fait dans le vide à Paris, et en une *heure* de temps moyen, un pendule dont la longueur en mètres est l, on a

$$\log l + 2 \log N = 7.1099156.$$

La gravité diminue lorsqu'on s'élève sur les montagnes, parce qu'on s'éloigne du centre d'attraction. Soient donc R le rayon terrestre en un lieu proposé, h la hauteur d'une sommité au-dessus du niveau de la mer (R et h sont rapportés à la même unité), g la gravité, l la longueur du pendule à secondes à ce même niveau, g' et l' les mêmes choses au sommet, on a

$$g = g'\left(1 + \frac{2h}{R}\right) = g' + \frac{2g'h}{R} \text{ et } g' = g - \frac{2gh}{R}$$

$$l = l'\left(1 + \frac{2h}{R}\right) = l' + \frac{2l'h}{R} \text{ et } l' = l - \frac{2lh}{R}$$

La longueur du pendule varie enfin avec la latitude (1). Si A désigne l'aplatissement de la terre, ou la différence des deux axes, celui de l'équateur étant pris pour l'unité, L la longueur du pendule à l'équateur, D l'excès de la longueur du pendule au pôle sur sa longueur à l'équateur, on a

$$A = 0.00865 - \frac{D}{L}$$

(1) M. Biot, dans un Mémoire lu tout récemment à l'Académie des Sciences, a montré que la pesanteur, et par conséquent la longueur du pendule, n'était point la même sur tous les points d'un même parallèle, que même elle pouvait varier avec le temps pour un même lieu. Les Anglais, qui ont pris pour base de leur système métrique la longueur du pendule, n'ont donc point atteint le but qu'ils se proposaient, cette base n'étant point invariable.

Digitized by Google

ou λ étant la latitude d'un lieu quelconque et l la longueur du pendule à cette latitude

$$l = L + D \sin^2 \lambda$$

Cette longueur l, calculée par l'ensemble de toutes les observations de MM. Biot, Bouvard, Mathieu, Arago, Chaix, Kater, Freycinet, Sabine et Duperrey, combinées par la méthode des moindres carrés, donne

$$l = 0.99102557 + 0.00507188 \sin^2 \lambda$$

Il ne nous reste plus, pour compléter ce que nous avons à dire du pendule, qu'à donner le rapport entre le pendule simple et le pendule composé. Or, l étant la longueur du pendule simple correspondant à un pendule composé, d la distance du centre de gravité du pendule composé au centre de suspension, m le moment d'inertie de la masse de ce pendule composé rapporté à un axe parallèle à l'axe de suspension, et passant par le centre de gravité, divisé par la masse totale (1), on a

$$l = \frac{d^2 + m^2}{d}$$

Problème.

Connaissant la longueur du pendule simple à secondes à Paris, on demande combien de temps emploiera un pendule d'un pied de longueur à faire ses vibrations?

(1) On appelle moment d'inertie la somme des produits des masses des molécules d'un corps par les carrés de leur distance à l'axe (qui est ici parallèle à l'axe de suspension).

Digitized by Google

$$\frac{t}{t'} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{l'}} \text{ devient } \frac{1}{t'}$$

$$= \frac{\sqrt{3.059439}}{\sqrt{1}} = \frac{\sqrt{3.059439}}{1}$$

$$\text{d'où } t' = \frac{1}{\sqrt{3.059439}} = \frac{1000}{1749} = 0''.57$$

Problème.

Quelle devrait être la longueur du pendule à Paris pour qu'il ne fît qu'une seule oscillation en 3 secondes ?

De la même formule $\frac{t}{t'} = \frac{\sqrt{l}}{\sqrt{l'}}$ qui revient à $\frac{t^2}{t'^2} = \frac{l}{l'}$

$$\text{on tire } \frac{l}{9} = \frac{3.059}{l'} \text{ d'où } l' = 9 \times 3.059 = 27^{\text{pieds}}.531.$$

Problème.

Quelle devrait être cette longueur pour que le pendule n'exécutât qu'une seule vibration par jour ?

$$\text{de } \frac{n'^2}{n^2} = \frac{l}{l'} \text{ on tire } l' = \frac{n^2 l}{n'^2}$$

$$= \frac{(86400)^2 \times 0.9938267}{1}$$

ou opérant par logarithmes, on a

$$\log l' = 2 \log 86400 + \log 0.9938267$$

ce qui donne 9.8730274

$$\overline{1}.9973107$$

$$9.8703381$$

Digitized by Google

qui correspond à peu près à 7418875000 mètres. Si on compare cette longueur au rayon terrestre qu'on peut faire en nombre rond = 6366200, on trouverait que ce pendule aurait plus de 1000 fois la longueur du rayon terrestre.

Problème.

Quelle est la longueur du pendule à secondes centésimal ? C'est celui qui bat les secondes quand on divise le jour en 10 heures, l'heure en 100′, la minute en 100″.

Ce pendule doit faire 100000 oscillations en 24 heur.

$l' = \frac{tn^2}{n'^2}$ devient donc $= \frac{0.9938267 \times (86400)^2}{100000}$

ou $2 \log n =$	$\bar{9}.8730274$
$\log l =$	1.9973107
$- \log n'^2 =$	-10
$\log l' =$	$\bar{1}.8703381$ d'où

longueur du pendule centésimal = 0m.7418875

Problème.

On rapporte qu'étant très jeune encore, Galilée vit par hasard, dans l'église métropolitaine de Pise, les balancemens d'une lampe suspendue à la voûte, et qu'il resta très frappé des retours périodiques de ces mouvemens, et de l'égalité de leur durée ou de leur isochronisme. Il n'en fallut pas davantage pour éveiller son génie, et cette observation d'un enfant devint la source des plus grandes découvertes. On lui attribue ce problème, dont la solution est plus curieuse qu'exacte.

Mesurer la hauteur de la voûte d'une église par les vibrations des lampes qui y sont suspendues.

Mettez la lampe en mouvement, en l'écartant fort peu de la verticale; avec une montre à secondes,

Digitized by Google

Examinez combien une vibration dure de secondes, ou si vous n'avez point de montre à secondes, comptez le nombre n des vibrations qui se font dans un certain nombre m de minutes précises ; ce qui donnera, avec d'autant plus d'exactitude la durée de chaque vibration que ce nombre de minutes sera plus considérable ; on aura pour les secondes t' de la durée de chaque oscillation

$$t' = \frac{m}{n}$$

supposons que $t = 5''.5$, la formule $\frac{t^2}{t'^2} = \frac{l}{l'}$ devient

$$l' = \frac{t'^2 l}{t^2} = \frac{(5''.5)^2 \times 3.059439}{1}$$

$$= 30.25 \times 3.059439 = 92^{\text{pieds}}.558...$$

On mesure directement la distance du œil de lampe au pavé, et on l'ajoute à ce résultat. On pourra s'exercer au calcul des autres formules au moyen du tableau suivant, qui présente le résultat comparé des observations du pendule faites jusqu'à ce jour.

La colonne marquée A indique le nombre de secondes de temps moyen, dont le pendule observé avance + ou retarde — sur le pendule calculé, dans la durée d'un jour moyen.

La colonne B exprime les élévations + ou abaissemens — du niveau de la mer auxquels on peut attribuer les discordances dans la marche des pendules observés et calculés. Ces nombres ne sont point exactement tels qu'il les faudrait pour mettre d'accord le calcul et l'observation.

(*Voyez d'autre part le tableau.*)

Digitized by Google

STATIONS.	LATITUDES.	PENDULE A LA STATION.	HAUTEUR de la STATION.
		lignes.	mètres.
Paris.	48° 50′ 45″ N.	440,5593	70
		millimètres.	
Unst.	60 45 25 N.	742,721034	9
Leith.	55 58 37 »	742,408533	21
Dunkerque.	51 02 10 »	742,07610	4
Paris.	48 50 14 »	741,90112	70
Clermont.	45 46 48 »	741,61059	406
Bordeaux.	44 50 26 »	741,60464	17
Figeac.	44 36 45 »	741,56033	283
Formentera.	38 39 56 »	741,20549	203
		pouces anglais.	
Unst.	60 45 28 N.	39,17144	9
Portsoy.	57 40 59 »	39,16142	29
Leith.	55 58 41 »	39,15539	21
Clifton.	53 27 43 »	39,14517	103
Arbury-Hill.	52 12 55 »	39,14057	225
Londres.	51 31 08 »	39,13908	28
Stanklin.	50 37 24 »	39,13552	74
Saint-Thomas.	0 24 41 N.	39,02069	6
Maranham.	2 31 43 S.	39,01197	23
Ascension.	7 55 48 »	39,02406	5
Sierra-Leone.	8 29 28 N.	39,01954	55
Trinité.	10 38 56 »	39,01879	6
Bahia.	12 59 21 S.	39,02378	65
Jamaïque.	17 56 07 N.	39,03508	3

Digitized by Google

PENDULE SEXAGÉSIMAL EN MILLIMÈTRES. A la station.	PENDULE SEXAGÉSIMAL EN MILLIMÈTRES. Au niveau de la mer.	PENDULE calculé.	A	B
				mètres.
993,8267	993,8493	993,90017	— 2″,30	+ 169
994,943086	994,945903	994,88706	+ 2 ,56	— 188
994,52446 2	994,53 0700	994,50960	+ 0 ,92	— 68
994,07914	994,08039	994,09189	— 0 ,54	+ 37
993,84474	993,86733	993,90017	— 1 ,43	+ 105
993,45554	993,58239	993,63055	— 2 ,09	+ 154
993,44757	993,45288	993,54740	— 4 ,11	+ 302
993,38828	993,45793	993,52721	— 3 ,01	+ 222
992,91276	992,97612	993,00633	— 1 ,27	+ 94
994,9366	994,9393	994,88712	+ 2 ,27	— 166
994,6821	994,6911	994,64781	+ 1 ,86	— 138
994,5289	994,5354	994,51969	+ 1 ,12	— 83
994,2694	994,3018	994,29972	+ 0 ,09	— 7
994,1525	994,2228	994,19348	+ 1 ,26	— 93
994,1147	994,1236	994,13360	— 0 ,43	+ 32
994,0243	994,0474	994,05610	— 0 ,37	+ 27
991,1076	991,1096	991,02583	+ 3 ,64	— 268
990,8861	990,8934	991,03544	— 6 ,18	+ 455
991,5289	991,1949	991,12211	+ 3 ,16	— 233
991,0784	991,0964	991,13615	— 1 ,73	+ 128
991,1932	691,0614	991,19876	— 5 ,98	+ 440
991,1861	991,2064	991,28180	— 3 ,28	+ 242
991,4731	991,4739	991,50653	— 1 ,42	+ 104

Digitized by Google

Le pendule, lorsqu'il est en repos, indique, comme nous l'avons dit, la direction de la pesanteur. Dans le voisinage des grandes chaînes de montagnes, on a trouvé que sa direction dévie un peu de la verticale, et s'incline vers la chaîne de montagnes; ce qui est une preuve évidente de leur force attractive sur le corps du pendule. On peut donc, au moyen du pendule, déterminer la densité de la terre.

Problème.

Déterminer la densité de la terre.

Maskelyne, astronome anglais, se servit de cet appareil au pied des monts Shehalliens, en Écosse. Il trouva une déviation de 54″, et, pour la densité de la terre, 4.56; celle de l'eau étant prise pour unité. L'opinion de ceux qui admettent que l'intérieur de la terre est rempli d'eau est réfutée par ce résultat.

En 1824, M. Carlini s'est proposé le même problème: il observa le pendule au sommet du mont Cenis, et trouva pour sa longueur réduite, au niveau de la mer, $0^m.993708$. Prenant ensuite la longueur du pendule de Bordeaux, déterminée par M. Biot; et la réduisant à la latitude du mont Cenis, il trouva $0^m.993498$. La différence que M. Carlini attribue à l'action de la montagne, est 0 millimètres.210.

Le mont Cenis forme à peu près un segment de sphère, dont la base a à peu près 11 milles géographiques, la flèche n'ayant guère que 1 mille. On peut donc calculer son volume (*voyez* la table); les substances qui le composent, sont le marbre et le gypse, dont la densité moyenne est 2.66. Ces données suffisent pour calculer sa masse. Avec ces élémens, on peut comparer l'action de la montagne dont on connaît le volume et la masse à l'action de la terre, dont on ne connaît que le volume. On trouvera ainsi, pour la densité moyenne, celle de l'eau étant toujours prise pour unité, 4,39, résultat qui diffère peu de celui de Maskelyne.

Digitized by Google

DES FORCES CENTRALES.

Si un corps situé à une distance constante r d'un point fixe est attiré continuellement vers ce point par une force constante φ, et lancé perpendiculairement à la direction de l'attraction avec une vitesse de projection V, il décrit une circonférence de cercle autour du point fixe, et l'on a

$$\varphi = \frac{V^2}{r}$$

Si g représente la gravité et h la hauteur de laquelle le corps devrait tomber pour acquérir la vitesse V,

$$\varphi = \frac{2gh}{r} \text{ ou } \varphi : g :: h : \tfrac{1}{2} r$$

φ est ici ce qu'on nomme la force centrifuge. Dans la théorie des frondes, elle représenterait donc la tension qu'éprouverait le fil, abstraction faite du poids du mobile; mais si F représente la force centrifuge du mobile et M sa masse,

$$F = \frac{M V^2}{r}$$

Enfin si F′ est la force centrifuge d'un autre mobile, circulant avec la vitesse V′ dans une circonférence de rayon r', on a entre ces deux forces centrifuges la relation

$$F : F' :: \frac{V^2}{r} : \frac{V'^2}{r'}$$

Soient t et t' les durées des révolutions

$$F : F' :: \frac{r}{t^2} : \frac{r'}{t'^2}$$

Digitized by Google

Si les durées des révolutions sont égales

$$F : F' :: r : r'$$

et si, comme dans le mouvement des corps célestes,

$$t^2 : t'^2 :: r^3 : r'^3$$

on a $$F : F' :: r^{17} : r^2$$

Sur la terre les corps décrivent dans chaque seconde décimale un arc de 4".1095 de leur circonférence; le rayon de l'équateur est de 6376522 mètres. Pendant une seconde, les corps touchent sous ce plan de 3m.64933 : ainsi la force centrifuge est à la pesanteur, dans ce rapport, de 1 à 288.4. La première de ces forces diminue la seconde, et les corps ne tombent qu'en vertu de leur différence. Nommons donc *gravité* la pesanteur entière; la force centrifuge est à l'équateur environ le 289me de la gravité (ou 0.0253); si la rotation de la terre était 17 fois plus rapide, l'arc décrit dans une seconde sous l'équateur serait 17 fois plus grand; la force centrifuge serait alors $(17)^2$, ou 289 fois plus forte : elle serait donc égale à la gravité, et les corps cesseraient de peser sur la terre à l'équateur : et pour une rotation plus rapide, les corps sous ce plan monteraient dans l'atmosphère, à la manière de la fumée. (Francœur, *Mécanique*, pag. 288.)

DU CHOC DES CORPS.

Dans la théorie du choc, on divise les corps en corps durs, corps élastiques et corps mous; les corps *durs* sont ceux dont les parties conservent constamment la même forme, et résistent puissamment aux efforts qu'on fait pour les altérer; les corps *élastiques* ont la propriété de reprendre la forme qu'on leur a fait perdre; enfin, les corps *mous* sont ceux dont les molécules ont peu d'adhésion entre elles, et qui sont privés de tout ressort.

Digitized by Google

Si x représente la vitesse commune après le choc de deux corps *durs* A, B, de masses M, m se mouvant avec des vitesses V, v, on a

$x = \dfrac{MV + mv}{M + m}$ si les corps se meuvent dans la même direction,

$x = \dfrac{MV - mv}{M + m}$ s'ils venaient au-devant de l'un de l'autre,

et $x = \dfrac{MV}{M + m}$ si le corps B était en repos lorsqu'il reçut le choc de A.

Si deux corps A, B sont parfaitement élastiques, et qu'ils se suivent, leurs vitesses U u, après le choc sont

$$U = \frac{V(M - m) + 2mv}{M + m}$$

$$u = \frac{-v(M - m) + 2MV}{M + m}$$

ou bien encore

$$U = V - \frac{2m(V - v)}{M + m}$$

$$u = v + \frac{2M(V - v)}{M + m}$$

Si les corps vont au-devant l'un de l'autre, il suffit de changer dans ces équations le signe de v, et l'on a

$$U = V - \frac{2m(V + v)}{M + m}$$

$$u = \frac{2M(V + v)}{M + m} - v$$

Digitized by Google

Si les vitesses sont égales $V = v$ donne

$$U = \frac{M - 3m}{M + m} \times V$$

$$\text{et } u = \frac{3M - m}{M + m} \times V$$

Chacun des corps A, B s'arrêtera, marchera en avant ou en arrière, selon qu'on aura

pour A $\quad V M = \text{ou} > \text{ou} < m \ (V + 2v)$

pour B $\quad v m = \text{ou} > \text{ou} < M \ (v + 2V)$.

Enfin, si B était au repos avant le choc, il faudrait faire $v = 0$ dans les équations précédentes, et l'on aurait

$$U = \frac{(M - m) V}{M + m}$$

$$u = \frac{2 M V}{M + m}$$

Les degrés d'élasticité des corps étant variables, on prend ordinairement le nombre 2 pour le degré des corps parfaitement élastiques, 1 pour les corps non élastiques; l'expérience détermine les valeurs intermédiaires pour les élasticités comprises dans ces limites. Appelant ces valeurs n, et U la vitesse du corps choquant, u celle du corps choqué après le choc, on a

$$U = V - n \left(\frac{V - v}{M + m} \right) m$$

$$u = v + n \left(\frac{V - v}{M + m} \right) M$$

Si le corps choqué était au repos, comme dans la

Digitized by Google

machine de Mariotte, qui sert à déterminer les degrés d'élasticité, on aurait

$$U = V - \frac{n\,V\,m}{M+m} \qquad u = \frac{n\,V\,M}{M+m}$$

$$\text{et } n = \frac{u\,(M+m)}{M\,V}$$

Problème.

Deux corps parfaitement élastiques se suivent ou marchent dans le même sens. Le corps A pèse 12 kil., et se meut avec une vitesse de 14 mètres; le corps B pèse 3 kil., et se meut avec une vitesse de 8 mètres. On demande leur vitesse après le choc.

La vitesse du corps choquant A

$$= V - \frac{2\,m\,(V-v)}{M+m} \text{ devient}$$

$$= 14 - \frac{6\,(14-8)}{15} = 11^{m}.6;$$

celle du corps choqué B

$$= v + \frac{2\,M\,(V-v)}{M+m} = 8 + \frac{24\,(14-8)}{15} = 17^{m}.6$$

Problème.

Si ces deux mêmes corps allaient au-devant l'un de l'autre, les données restant d'ailleurs les mêmes, on aurait après le choc
vitesse de A

$$= V - \frac{2\,m\,(V+v)}{M+m} = 14 - \frac{6\,(14+8)}{15} = 15^{m}.2$$

Digitized by Google

vitesse de B

$$= \frac{2M(V+v)}{M+m} - v = \frac{24 \times (14+8)}{15} - 8$$

$$= 27^{m}.2$$

Problème.

Étant donnés deux corps sphériques sans élasticité sensible, le premier pesant 1 livre, et possédant une vitesse 2 ; le second pesant $\frac{1}{2}$ livre, mais doué d'une vitesse 3. Ces corps se meuvent dans la même direction. On demande la vitesse commune après le choc

$$x = \frac{MV + mv}{M+m} \text{ donne } \frac{1 \times 2 + 0.5 \times 3}{1 + 0.5}$$

$$= \frac{2 + 1.5}{1.5} = \frac{35}{15} = 2\frac{1}{3}.$$

Problème.

Une balle de 4 onces frappe une autre balle de la même substance, pesant 3 onces, avec une vitesse 10, et lui communique une vitesse de $8\frac{1}{2}$. Quelle est, dans ce cas, la valeur de l'élasticité ?

$$n = \frac{u(M+m)}{MV} \text{ devient } = \frac{8\frac{1}{2} \times 7}{4 \times 10} = \frac{57\frac{1}{2}}{40}$$

$$= 1.44375$$

l'élasticité parfaite étant 2.

Problème.

Deux globes parfaitement élastiques se choquent en sens contraire. On sait que la somme de leurs vitesses, avant le choc, était 22, et leur différence 4.

Digitized by Google

La masse du premier est 7, et sa vitesse, après la percussion, $9\frac{1}{7}$. On demande quelles étaient la masse du second, et sa vitesse après le choc.

Ce problème peut avoir plus d'une solution; la plus simple donne,

pour la masse 5, et pour la vitesse $9\frac{1}{7}$.

Problème.

Deux autres globes, d'un ressort parfait, se choquent en se mouvant dans le même sens. On sait que la somme de leurs masses était 15, et leur différence 5; que la vitesse du corps choquant, après la collision, est $6\frac{2}{7}$, et celle du corps choqué $8\frac{1}{7}$; on demande les vitesses avant le choc.

La solution la plus simple donne $V = 8$, $v = 6$.

Problème.

Soit proposée une série de huit corps sphériques parfaitement élastiques, dont les masses décroissent selon la progression 54 : 18 : 6 : 2 :..... dont la raison est 3. Le premier corps 54 choque les autres disposés en file contiguë, avec une vitesse $17\frac{11}{128}$. On demande l'expression de la vitesse que recevra le dernier corps.

Réponse, $\frac{55987}{72}$.

Problème.

Une autre série de globes parfaitement élastiques se choquent d'une manière semblable. On sait que la masse de chaque corps était la moitié de celle du précédent, que la vitesse initiale du corps choquant était 1, et la vitesse acquise du dernier, après la percussion, $3\frac{13}{81}$.

On demande quel était le nombre total des globes. Réponse, il y en avait 5.

On trouverait encore, en se servant de nos formules, qu'une balle de plomb d'une once arrêterait exactement un Biscaïen d'une livre, si elle avait une vitesse 16 fois aussi grande que celle de ce bis-

Digitized by Google

caïen ; elle arrêterait un boulet de 48, si sa vitesse était 768 fois aussi grande que celle de ce boulet. Une balle d'infanterie, pesant $\frac{1}{20}$ de livre, et sa vitesse au sortir du canon étant de 1300 pieds par seconde, si elle venait frapper un boulet de 48 au repos, elle le pousserait devant elle, et leur vitesse commune serait de 1 pied $\frac{1}{7}$ par seconde. Nous supposons ici les corps parfaitement durs.

DU JEU DE BILLARD.

La théorie de ce jeu repose sur les principes suivans :

1°. Lorsqu'un corps à ressort parfait vient choquer un obstacle (la bande), il se réfléchit en faisant l'angle de réflexion égal à l'angle d'incidence.

2°. Un corps parfaitement élastique qui vient à en choquer un autre de même masse au moment où ce dernier est au repos, lui communique toute sa vitesse, et prend lui-même l'état du repos, à moins que le choc ne soit oblique.

3°. Si le choc est oblique, c'est-à-dire si le corps sphérique B n'est point poussé vers A (*fig.* 8), suivant la droite qui joint leurs centres avant le choc, le premier ne communiquera qu'une partie de sa vitesse au second, et il se dirigera après le choc suivant la tangente au point de contact.

Nous supposons toujours l'élasticité parfaite, les frottemens nuls, et l'impulsion de la queue dirigée par le centre de gravité des billes.

Problème.

Les positions de la blouse C (fig. 9) *et de deux billes A, B étant données, déterminer* 1°. *le point où l'on doit frapper celle de son adversaire pour l'envoyer dans cette blouse;* 2°. *la direction de la bille choquante après le coup.*

Par le centre de la blouse et celui de la bille A, concevez une droite indéfinie C I O ; au point I, où cette droite rencontre la surface de la bille, menez

Digitized by Google

une tangente V Y ; prenez sur le prolongement de C I une quantité I E égale au rayon de la bille B, par ce point E mener une parallèle D G à la tangente V Y ; enfin, du point B, abaissez les perpendiculaires B O, B D sur C O et D G, pour former le rectangle B D E O. On conçoit ainsi comment la vitesse B E se décompose en D E, E O ; la première, ayant son effet comme si la bille A n'existait point, tend, après ce choc, à mouvoir B selon E G ; la seconde E O se transmet tout entière à la bille A, et la chasse en C. On voit donc 1°. *que le point I, où dans tous les cas semblables on doit frapper la bille, est déterminé par la droite C I, qui passe par le centre de la blouse et celui de la bille ;* 2°. *que la bille B devra toujours être dirigée vers le point E, situé sur le prolongement de C I, à une distance de I égale au rayon de la bille choquante ;* 3°. *que la direction de cette bille, après le choc, est parallèle à la tangente au point de contact, ou perpendiculaire à la direction O C.* Cette direction est importante à connaître, car il ne suffit point d'avoir touché la bille de son adversaire ou de l'avoir poussée dans la blouse, il faut ne pas y tomber soi-même. Est-il nécessaire d'ajouter que si l'angle C A B était droit ou aigu, le problème ne serait plus possible, puisqu'on ne pourrait point toucher le point I?

Problème.

Avec la bille B (*fig.* 8), toucher la bille A et la bille C, ou caramboler.

Concevez la bille A d'un rayon A E double de son rayon réel A I, si la bille A est de même diamètre que B ; du centre de la bille C, menez une tangente E C, le point E est celui vers lequel on doit pousser B. Pour que le problème soit possible, il faut généralement que l'angle B E C soit obtus.

Digitized by Google

Problème.

Frapper une bille de bricole.

On appelle bricoler, ne toucher une bille qu'après avoir frappé une bande. Ainsi, soit proposé (*fig.* 10) de toucher B après la bande X Y. Il suffit ici de déterminer le point C, de telle sorte que l'angle d'incidence A C O soit égal à l'angle de réflexion O C B. Après avoir tiré E I parallèle à X Y, et à une distance égale au rayon de la bille, abaissez une perpendiculaire indéfinie A *a* sur E I, puis, prenant E *a* = E A, menez par le point *a* la droite *a* B, le point C est déterminé; en effet, à cause des parallèles A *a*, C O, on a K C O = K *a* A, et aussi A C O = C A E; mais les triangles rectangles, A E C, *a* E C, sont égaux, donc l'angle C A E = E *a c* ou K *a* A, donc A C O = K C O. Comme ce tracé n'est point possible, on conçoit une perpendiculaire B N prolongée en *b* d'une quantité égale à elle-même, et l'on vise alors vers ce point de l'espèce dans la direction A *b*.

Problème.

Avec la bille A choquer B après une double bricole (*fig.* 11).

Concevez d'abord les parallèles aux bandes X Y, Y Z menées à une distance égale au rayon de A; du point A, abaissez A N perpendiculaire à Y Z, et prolongez-la d'une quantité *a* N = A N. Le problème est ainsi ramené au cas précédent; en effet, on peut supposer la bille A transportée en *a*; il ne s'agit plus que de tracer une bricole; du point *a*, conduisez C *a* perpendiculaire à la direction de la bande X Y; prenez C *a* = C *a*, joignez *a* B, le point V′ est déterminé; on trouve V en tirant *a* V′: A V V′ B est donc le chemin que parcourra le mobile A.

Digitized by Google

Problème.

Faire bricoler la bille A sur la bande P Q, de manière à choquer la bille B et l'envoyer dans la blouse M.

Menez toujours X Y parallèle à la bande P Q, et à une distance de cette bande égale au rayon des billes; joignez par M B, que vous prolongerez jusqu'en *i*; du point A, abaissez A *a* perpendiculaire à X Y; prenez N *a* = A N, joignez les points *a*, *i*, par la droite *a* V *i*. Après avoir touché le point V ainsi déterminé, la bille A viendra choquer B, l'enverra dans la blouse M, et continuera à se mouvoir suivant l R, c'est-à-dire *suivant la tangente au point de contact.*

GRAVITATION.

Le principe fondamental est que les molécules de la matière s'attirent mutuellement en raison des masses, et réciproquement au carré des distances.

Il est pareillement démontré qu'un point matériel placé à la surface d'une sphère, qui exerce sur lui son attraction, tendra vers elle avec une force qui sera la même que si toute la masse était réunie à son centre. Cela posé, et les formules relatives à la chute des corps étant présentes à l'esprit, on peut se demander :

Problème général.

Quelle serait la pesanteur d'un corps transporté à la surface du soleil, ou d'une autre planète que la terre comparée à celle de ce corps sur la surface de notre globe, et quel espace parcourrait un corps en une seconde, soumis à l'action de la pesanteur seulement ?

Le tableau suivant fournit les données et les résultats du calcul.

Digitized by Google

ASTRES.	MASSES.	RAPPORT des rayons.	POIDS.	CHUTE en 1″.
				pieds.
Soleil....	329630	109.93	27.65	421.14
Mercure..	0.1627	0.3944	1.07	16.15
Vénus....	0.9243	0.9730	1.	15.07
Terre....	1.....	1.	1.	15.1
Lune.....	0.0146	0.2731	0.228	3.44
Mars.....	0.1294	0.5556	0.443	6.47
Jupiter...	308.94	11.5616	2.51	35.68
Saturne...	93.271	9.6094	1.3	19.63
Uranus...	1.6904	4.2630	0.95	14.36

On pourra encore calculer la longueur du pendule à seconde pour ces astres au moyen des formules données, en y introduisant pour g la valeur convenable donnée par le tableau.

HYDROSTATIQUE.

Principe fondamental.

Les liquides transmettent dans tous les sens et également les pressions qu'on exerce à leur surface. On connaît ce principe sous le nom d'*égalité de pression*.

On fait ici abstraction de la pesanteur et de la compressibilité du liquide.

Si donc une force P agit sur une partie A de la surface d'un liquide renfermé dans un vase, la pression p qu'elle exerce sur une autre partie de la surface ou sur la surface totale a des parois, est

Digitized by Google

$$p = \frac{a\,P}{A}$$

Si l'on rapporte la pression P à l'unité de surface (le centimètre, décimètre carré), c'est-à-dire si l'on fait $A = 1$, on a

$$p = a\,P$$

La pression qu'éprouve en tous sens une molécule quelconque d'un fluide pesant en équilibre dans un vase est égale au poids d'un filet vertical de ce fluide qui aurait pour hauteur la distance de cette molécule au plan de la surface supérieure du fluide.

Le fond d'un vase, quelle que soit la forme de ce vase, pourvu que la base soit horizontale, éprouve donc, de la part du fluide qu'il contient et qui est en équilibre, une pression p égale au poids P d'une colonne fluide qui aurait pour base le fond même du vase a et pour hauteur h la distance de ce fond au plan de niveau, ou

$$p = P\,ah.$$

Si la base était inclinée ou courbe, il faudrait compter la hauteur à partir du centre de gravité de la surface de cette base. (Voyez *centres de gravité*.)

Problème.

En supposant qu'un baril cylindrique de deux pieds de diamètre et trois pieds de hauteur soit surmonté d'un tube vertical de 30 pieds de longueur, et que le baril aussi bien que le tube soient entièrement pleins d'eau, on demande quelle pression éprouvera le fond du baril, en évaluant le poids du pied cube d'eau à 70 livres?

Le diamètre du fond étant de 2 pieds, on a pour a (*voyez* le vocabulaire, au mot *cercle*) 3.1416.

La formule $p = P\,ah$ donne $p = 70 \times 3.1416 \times 33 = 7257$ livres environ.

Quelques unes des révolutions de la surface du globe sont les conséquences du même principe; il

Digitized by Google

peut produire des tremblemens de terre, fendre ou même faire écrouler des montagnes. Supposons, par exemple, que dans le sein d'une montagne il se trouve un vide horizontal de 30 à 40 pieds carrés sur quelques pouces de hauteur, et que les pluies ou d'autres causes forment un conduit qui du haut de la montagne descende jusque dans l'espace vide, et ait une longueur de plusieurs centaines de pieds; lorsque l'eau aura rempli la cavité, et qu'elle s'élèvera dans ce tube d'une nouvelle espèce, la montagne pourra être brisée en éclats, si elle a résisté quelque temps aux premiers efforts de l'eau qui, s'élevant de plus en plus, acquerra une incroyable énergie.

La même chose arriverait si une sonde enfoncée profondément atteignait un réservoir d'eau souterrain, et que la pluie vînt à remplir le trou. Une contrée entière pourrait se trouver bouleversée si, comme on le voit souvent, le réservoir avait plusieurs lieues d'étendue.

Problème.

On demande de déterminer la pression d'une masse d'eau contre un plan incliné submergé de forme trapézoïdale, dont la base aurait 10 pieds; le côté opposé et, par conséquent, parallèle à cette base 6 pieds, un des côtés inclinés 7 pieds $\frac{1}{2}$, le quatrième enfin 10 pieds $\frac{1}{6}$; la distance verticale du centre de gravité de ce plan, au niveau du liquide, est de 20 pieds.

Le vocabulaire, au mot *trapèze*, donne $a = \frac{1}{2} h$ $(B + b)$. On connaît B et b; il ne s'agit plus que de trouver h, dont on trouve la valeur au même article.

Un calcul semblable à celui du dernier problème donnera pour la pression 78400 livres.

Si l'on faisait une ouverture au fond d'un bateau, l'eau jaillirait à l'instant, et pour l'empêcher d'entrer il faudrait exercer une pression qui fût égale au poids d'une colonne d'eau qui aurait pour base l'ouverture et pour hauteur la profondeur du bateau au-dessus du niveau. C'est pour cela que dans les

Digitized by Google

grands vaisseaux la quille doit avoir une grande force pour résister aux pressions de bas en haut qui s'exercent sur le fond du bâtiment. Si ce fond était horizontal, et qu'il eût, par exemple, 100 mètres carrés de superficie, la pression ne serait pas moindre de cent mille kilogr., quand le tirant serait d'un mètre, et trois cent mille kilogrammes quand il serait de trois mètres.

DES PESANTEURS SPÉCIFIQUES.

Corps flottans.

Le poids d'un corps quelconque, considéré en lui-même, sans s'embarrasser du volume sous lequel il est contenu, est ce qu'on appelle son poids absolu P; le poids compris sous l'unité de volume est son *poids spécifique* G; si V est le volume du corps, M sa masse, on a les relations suivantes :

$$P = G\,V, \quad G = \frac{P}{V}$$

Si P et p sont les poids absolus de deux corps, dont V et v sont les volumes, G, g, les poids spécifiques, M, m, leurs masses, D, d, les densités,

$$G : g :: \frac{P}{V} : \frac{p}{v} :: \frac{M}{V} : \frac{m}{v} :: D : d$$

Problème.

Déterminer le rapport R des poids spécifiques de deux corps.

1°. S'il s'agit de liquides, on prend un flacon vide, dont on cherche le poids a; on le remplit d'eau, et une nouvelle pesée donne b; enfin, on le remplit du liquide dont on veut obtenir le poids spécifique c.

$$R = \frac{c - a}{b - a}$$

Digitized by Google

S'il s'agit d'un solide, on met le flacon plein d'eau dans un des plateaux d'une balance, et on établit l'équilibre à l'aide de poids connus; puis on place le corps à côté du flacon, et on établit de nouveau l'équilibre à l'aide d'un nouveau poids ϖ, qui est évidemment celui du corps solide; enfin, l'on introduit le corps dans ce flacon plein d'eau, et l'on se trouve obligé, pour produire de nouveau l'équilibre, d'ajouter un nouveau poids E.

$$R = \frac{\varpi}{E}$$

Problème.

On peut encore se servir de l'aréomètre Fahrenheit, dont nous ne pouvons ici donner la description, mais qui d'ailleurs est bien connu.

Soit p le poids de l'instrument, plus celui dont on le charge pour le faire *affleurer* dans le premier liquide, $p \pm q$, ce poids, dans le second des liquides, dont nous appelons les pesanteurs spécifiques π et π', on a

$$\frac{\pi'}{\pi} = \frac{p \pm q}{p}$$

Pour les solides, on se sert de l'instrument de Nicholson, ou de la verge hydrostatique de Coates. Nommons k le poids placé dans la cuvette supérieure pour produire l'affleurement. On ôte ce poids, et on y substitue le corps, plus le poids l nécessaire pour produire l'affleurement. Enfin, on place le corps avec un poids m, dans le bassin inférieur, pour produire encore l'affleurement; on a pour le rapport R des poids spécifiques du liquide et du solide

$$R = \frac{k - l}{m - l}$$

Et si p désigne le poids du corps dans l'air, et n

Digitized by Google

la perte que le corps a faite de son poids dans l'eau,

$$p = k - l \qquad n = m - l$$

S'il s'agit de deux fluides, a étant le poids de l'instrument, l la charge qui produit l'affleurement dans le premier, λ le poids qu'il faut ajouter ou ôter pour le produire dans le second, le rapport R des poids spécifiques est

$$R = \frac{a + l \pm \lambda}{a + l} = 1 \pm \frac{\lambda}{a + l}$$

Si l'on conçoit une balance très exacte qui porte en dessous un crin auquel on puisse suspendre le corps, qu'après avoir mis l'instrument en équilibre dans l'air au moyen d'un poids P, on laisse ensuite plonger le corps dans l'eau, l'équilibre sera détruit, et il faudra pour le rétablir un poids f, le rapport des poids spécifiques du corps et de l'eau sera

$$R = \frac{P}{f}$$

Problème.

On trouverait le volume V d'un corps en décimètres cubes, par

$$V = \frac{\overset{\text{kilog.}}{f} \times \overset{\text{litre.}}{1}}{1 \text{ kil.}}$$

Enfin, si f, f' sont les poids qu'il faut ajouter pour qu'un corps quelconque, suspendu comme nous l'avons dit plus haut, et plongé successivement dans deux différens fluides, soit équilibré, le rapport des poids spécifiques de ces fluides est

$$R = \frac{f}{f'}$$

C'est en partie par ces moyens qu'on a déterminé les poids spécifiques des substances suivantes.

Digitized by Google

Pesanteurs spécifiques des fluides élastiques, celle de l'air étant prise pour unité.

NOMS DES FLUIDES ÉLASTIQUES.	DENSITÉS déter. par exp.	DENSITÉS calculées
Air	1.0000	
Vapeur d'iode	.....	8.6195
Vapeur d'éther hydriodique	5.4749	
Vapeur d'essence de téréb.	5.0130	
Gaz hydriodique	4.443	
Gaz fluo-silicique	3.5735	
Gaz chloro-carbonique	.....	3.3894
Vapeur de carbure de soufre	2.6447	
Vapeur d'éther sulfurique	2.5860	
Chlore	2,470	2.4216
Gaz euchlorine	.....	2.3782
Gaz fluo-borique	2.3709	
Vap. d'éther hydro-chlorique	2.2119	
Gaz sulfureux	2.1204	
Gaz chloro-cyanique	.....	2.111
Cyanogène	1.8064	1.8011
Vapeur d'alcool absolu	1.6133	
Protoxide d'azote	1.5204	1.5209
Acide carbonique	1.5240	
Gaz hydro-chlorique	1.2474	
Gaz hydro-sulfurique	1.1912	
Gaz oxigène	1.1036	
Deutoxide d'azote	1.0388	1.0364
Gaz oléfiant	0.9780	
Gaz azote	0.976	
Gaz oxide de carbone	0.9669	0.9678
Vapeur hydro-cyanique	0.9476	0.9360
Hydrogène phosphuré	0.870	
Vapeur d'eau	0.6235	0.6224
Gaz ammoniacal	0.5967	
Gaz hydrogène carboné	0.555	
Gaz hydrogène arsénié	0.529	
Gaz hydrogène	0.0688	

Digitized by Google

Liquides. Celle de l'eau étant 1.

Acide sulfurique	1,8409
Acide nitreux	1,550
Eau de la mer morte	1,2403
Acide nitrique	1,2175
Eau de la mer	1,0263
Lait	1,03
Eau distillée	1,0000
Vin de Bordeaux	0,9939
Vin de Bourgogne	0,9915
Huile d'olive	0,9153
Ether muriatique	0,874
Huile essentielle de térébenthine	0,8697
Bitume liquide dit *naphte*	0,8475
Alcool absolu	0,792
Ether sulfurique	0,7155

Solides.

Platine	laminé	22,0690
	passé à la filière	21,0417
	forgé	20,3366
	purifié	19,5000
Or	forgé	19,3617
	fondu	19,2581
Tungstein		17,6
Mercure (à 0°)		13,598
Plomb fondu		11,3523
Palladium		11,3
Rhodium		11,0
Argent fondu		10,4743
Bismuth fondu		9,822
Cuivre en fil		8,8785
Cuivre rouge fondu		8,7880
Molybdène		8,611
Arsenic		8,308
Nickel fondu		8,279
Urane		8,1
Acier non-écroui		7,8165
Cobalt fondu		7,8119

Digitized by Google

Fer en barre	7,7880
Etain fondu	7,2914
Fer fondu	7,2070
Zinc fondu	6,861
Antimoine fondu	6,712
Tellure	6,115
Chrôme	5,9
Iode	4,9480
Spath pesant	4,4300
Jargon de Ceylan	4,4161
Rubis oriental	4,2833
Saphir oriental	3,9941
Saphir du Brésil	3,1307
Topaze orientale	4,0106
Topaze de Saxe	3,5640
Brésil oriental	3,5489
Diamans les plus lourds (légèrement colorés en rose)	3,5310
— les plus légers	3,5010
Flint-glass (anglais)	3,3293
Spath fluor (rouge)	3,1911
Tourmaline (verte)	3,1555
Asbeste roide	2,9958
Marbre de Paros (chaux carbonatée lamellaire)	2,8376
Quartz-jaspe onyx	2,8160
Emeraude verte	2,7755
Perles	2,7500
Chaux carbonatée cristallisée	2,7182
Quartz-jaspe	2,7105
Corail	2,680
Cristal de roche pur	2,6530
Quartz-agathe	2,615
Feld-spath limpide	2,5644
Verre de Saint-Gobain	2,4882
Porcelaine de la Chine	2,3847
Chaux sulfatée cristallisée	2,3117
Porcelaine de Sèvres	2,1457
Soufre natif	2,0332
Ivoire	1,9170

Digitized by Google

Albâtre	1,8740
Anthracite	1,8
Alun	1,720
Houille compacte	1,3292
Jayet	1,259
Succin	1,078
Sodium	0,9726
Glace	0,930
Potassium	0,8651
Bois de hêtre	0,852
Frêne	0,845
If	0,807
Bois d'orme	0,800
Pommier	0,733
Bois d'oranger	0,705
Sapin	0,657
Tilleul	0,604
Bois de cyprès	0,598
Bois de cèdre	0,561
Peuplier blanc d'Espagne	0,529
Bois de sassafras	0,482
Peuplier ordinaire	0,383
Liége	0,240

Pour établir une liaison entre les Tables de pesanteurs spécifiques qui précèdent, nous ajouterons que, d'après les recherches de MM. Biot et Arago, le poids de l'air atmosphérique sec, à la température de la glace fondante et sous la pression de $0^m.76$, est, à volume égal, $\frac{1}{770}$ de celui de l'eau distillée.

Par une moyenne entre un grand nombre de pesées, on a trouvé qu'à zéro de température et sous la pression de $0^m.76$, le rapport du poids de l'air à celui du mercure est de 1 à 10466.

Problème.

Le roi Hiéron avait fait remettre à un orfèvre une certaine quantité d'or pour en faire une couronne; mais l'artiste infidèle retint une partie de cet or et lui substitua un égal poids d'argent. On

Digitized by Google

soupçonna la fraude ; et comme on ne voulait pas gâter un ouvrage qui était d'ailleurs d'un travail exquis, Archimède fut consulté sur le moyen de découvrir la quantité d'argent substituée à l'or. On sait qu'il réussit à résoudre ce problème ; mais on ne connaît pas précisément la méthode qu'il suivit. On demande comment il pouvait le résoudre par les principes de l'hydrostatique ?

Solution.

Il est évident que si l'on prend deux morceaux d'une même matière, par exemple, deux lingots d'or ou d'argent, et qu'on les plonge dans un même fluide, ils perdront des parties de leurs poids proportionnelles à ces poids ; car ils perdront des parties équivalentes aux poussées du fluide, et les poussées du fluide sont proportionnelles aux volumes des corps qu'on y plonge. Or, quand deux corps sont de même espèce, leurs volumes sont comme leurs poids. Donc les poids que les deux corps perdront par l'immersion seront proportionnels aux poids absolus.

Cela posé, soient respectivement a, b, c les poids d'un lingot d'or, d'un lingot d'argent et de la couronne proposée ; a', b', c' ce que ces corps perdent de leurs poids quand on les plonge dans le fluide ; x le poids de la quantité d'or qui entre dans la couronne, y le poids de l'argent qu'on a allié avec cet or. Nous aurons d'abord l'équation

$$x + y = c.$$

Ensuite le poids a du lingot d'or est à la quantité d'or x qui entre dans le mélange, comme le poids a' que le lingot perd dans le fluide est à ce que la quantité x peut y perdre. Cette quantité perdra donc une partie de son poids exprimée par

$$\frac{a'x}{a}.$$

Digitized by Google

De même le poids b du lingot d'argent est à la quantité d'argent y qui entre dans l'alliage, comme le poids b' que le lingot d'argent perd dans le fluide est au poids que la quantité y doit y perdre. Cette quantité y perdra donc une partie de son poids exprimée par

$$\frac{b'y}{b}.$$

Or, si l'on ajoute ensemble ce que l'or et l'argent qui entrent dans le mélange doivent perdre de leurs poids, on aura ce que la couronne perd du sien, c'est-à-dire,

$$\frac{a'x}{a} = \frac{b'y}{b} = c;$$

équation qui, comparée avec

$$x + y = c,$$

fera trouver les valeurs de x et de y.

Problème.

Une pièce d'argent, pesant dans l'air trois onces, a été plongée dans l'eau, et dans ce liquide son poids n'était plus que de 2 onces 5 gros et 56. On demande le poids spécifique du métal, celui de l'eau étant pris pour unité. Il faut d'abord trouver $E = 3^{onces} - 2^{o}.\ 5^{gros}\ 56^{grains} =$ en réduisant tout en grains, 160.

$$R = \frac{\varpi}{E} = \frac{1728}{160} = 10.8.$$

C'est la pesanteur spécifique demandée.

Problème.

Quel sera le poids absolu d'un demi-pied cube d'or, sachant que le poids spécifique de ce métal est 19.26, et que le pied cube d'eau pèse 70 livres?

Digitized by Google

P = G V donne $19.26 \times \frac{1}{7} = 9.63$, qui, multiplié par 70, donne pour le poids absolu 674.1. livres.

Principes.

Un corps plongé dans un fluide y perd une partie de son poids égale au poids du volume de fluide qu'il déplace.

Les pesanteurs spécifiques de deux corps solides, qui ont le même poids absolu l'un et l'autre, sont réciproquement proportionnelles aux parties qu'*ils* perdent de leur poids dans le même fluide. Ce dernier principe est implicitement compris dans les formules placées au commencement de ce chapitre.

Problème.

Deux boules du même poids dans l'air, l'une d'étain, l'autre de plomb, ont été pesées séparément dans l'eau : la première a perdu dans ce liquide 1 once 3 gros 2 $\frac{1}{2}$ grains de son poids, et la seconde 7 gros 2 grains. On demande le rapport entre les poids spécifiques des deux métaux?

Plomb : Étain :: 361 : 230.

Problème.

Pour déterminer la pesanteur spécifique d'un morceau de bois du poids de 150 grains, on y a joint un fragment de cuivre pesant, dans l'air, 180 grains, et dans l'eau 160. On a trouvé d'ailleurs que le système des deux corps pesait 330 grains dans l'air et 60 dans l'eau.

On demande la pesanteur spécifique du bois.

Réponse. — 0.6.

Problème.

On veut déterminer la pesanteur spécifique de l'éther sulfurique, à l'aide d'un aéromètre de Fahrenheit, du poids de 460 grains. Pour faire affleurer

Digitized by Google

l'instrument dans l'eau distillée, il a fallu charger ce petit bassin de 158 grains, et de 38 pour produire le même effet dans l'éther.

$$\frac{s'}{s} = \frac{p-q}{p} = \frac{618-120}{618} = \frac{498}{618} = \frac{1}{\pi} = 0.805$$

Principe.

La pesanteur spécifique p d'un corps plongé dans un fluide est à celle p' du fluide, comme la partie V du corps plongé est au volume total V′ du corps, ou

$$p : p' :: V : V'$$

Problème.

En supposant que la pesanteur spécifique de la glace est à celle de l'eau liquide comme 8 est à 9, on demande quel devra être le volume de la portion submergée d'une masse de glace flottante de 18,000 pieds cubes ?

$$8 : 9 :: V : 18000 \text{ donne } V = \frac{18000 \times 8}{9}$$

$$= 16000 \text{ par cubes.}$$

Comme trois de ces quatre quantités étant connues, on a toujours la quatrième, on peut se passer des problèmes du même genre.

Problème.

Un nageur voudrait savoir quelle quantité de liége serait nécessaire pour le faire flotter sur l'eau, sans aucun travail. Pour cela il commence par déterminer le volume de son corps en se plongeant entièrement dans un baquet étroit et cylindrique, en partie rempli d'eau, de 16 pouces de diamètre intérieur. La surface de l'eau du vase s'est élevée,

Digitized by Google

après l'immersion, de 17 pouces au-dessus du niveau primitif. On suppose d'ailleurs que le corps de cet homme est de $\frac{1}{10}$ plus pesant que pareil volume d'eau, et que le poids spécifique du liége est le $\frac{1}{4}$ de celui du même liquide.

La quantité cherchée sera 4 livres 9 onces 6 gros et 16 grains, en sorte que 5 à 6 livres de liége seraient plus que suffisantes pour faire flotter un homme à la surface de l'eau.

DE L'ÉCOULEMENT DE L'EAU.

Si sur les parois d'un vase plein d'eau on perce un orifice, le fluide en sortira avec une vitesse v égale à celle qu'un corps aurait acquise en tombant librement de la hauteur h, comprise entre l'orifice et le niveau de l'eau dans le vase, d'où

$$v = 4^{m}.43\sqrt{h}$$

abstraction faite de la résistance de l'air.

Problème.

Le niveau d'un réservoir restant constamment de $1^{m}.224$ au-dessus de l'orifice de sortie, on demande quelle sera la vitesse théorique de l'eau à la sortie du réservoir ?

On a $v = 4^{m}.43\sqrt{h} = 4^{m}.43\sqrt{1.224} = 4^{m}.43 \times 1.1 =$ enfin 4.873, ou approximativement $4^{m}.9$, c'est-à-dire que l'eau parcourrait $4^{m}.9$ par seconde. C'est au moyen de cette formule qu'on a calculé la table suivante.

Digitized by Google

Vitesses par seconde, et Hauteurs de chute correspondantes exprimées en mètres.

v	h	v	h	v	h	v	h
m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.	m.
0.1	0.0005	2.1	0.225	4.1	0.857	6.1	1.897
0.2	0.0020	2.2	0.247	4.2	0.899	6.2	1.960
0.3	0.0046	2.3	0.270	4.3	0.943	6.3	2.023
0.4	0.0082	2.4	0.294	4.4	0.987	6.4	2.088
0.5	0.0127	2.5	0.319	4.5	1.032	6.5	2.154
0.6	0.0184	2.6	0.345	4.6	1.079	6.6	2.221
0.7	0.0250	2.7	0.372	4.7	1.126	6.7	2.288
0.8	0.0326	2.8	0.400	4.8	1.174	6.8	2.357
0.9	0.0413	2.9	0.429	4.9	1.224	6.9	2.427
1.0	0.0510	3.0	0.459	5.0	1.274	7.0	2.498
1.1	0.0617	3.1	0.490	5.1	1.326	7.1	2.570
1.2	0.0734	3.2	0.522	5.2	1.378	7.2	2.643
1.3	0.086	3.3	0.555	5.3	1.432		
1.4	0.100	3.4	0 589	5.4	1.486		
1.5	0.115	3 5	0.624	5.5	1.542		
1.6	0.131	3.6	0.661	5.6	1.599		
1.7	0.147	3.7	0.698	5.7	1.656		
1.8	0.165	3.8	0.736	5.8	1.715		
1.9	0.184	3.9	0.775	5.9	1.774		
2.0	0.204	4.0	0.816	6.0	0.835		

Si S est l'aire de l'orifice, Q la quantité ou volume d'eau écoulé en une seconde, et qu'on appelle la *dépense*, on a

$$Q = S\,v = 4^{m}.43\ S\ \sqrt{h}\ \text{mètres cubes},$$

l'orifice étant circulaire et d'un diamètre d

$$S = 0.785\ d^{2} \text{ et}$$

$$Q = 3.48\ d^{2}\ \sqrt{h}\ \text{mètres cubes.}$$

Digitized by Google

C'est la dépense *théorique;* mais la dépense réelle est moindre. La veine fluide à sa sortie se contracte, et il en résulte une diminution dans le produit de l'écoulement. L'expérience a fait connaître que D étant la dépense théorique que nous savons trouver,

$D \times 0.62$ est la dépense réelle si l'orifice est percé dans une mince paroi.

$D \times 0.82$ est celle qui a lieu si l'écoulement se fait par un petit ajutage cylindrique, et elle devient $D \times 0.9$ si l'ajutage est conique.

Ces nombres 0.62, 0.82, 0.9 sont les coefficiens de contraction de la veine fluide. Si nous désignons ce coefficient par m afin d'avoir une expression plus générale, Q désignant maintenant la dépense réelle, on a

$$Q = m\,S\,v = 3.48\,d^2\,m\,\sqrt{h}.$$

Dans l'*Art du Fontainier,* les dépenses s'expriment en pouces d'eau; c'est le produit d'un tuyau de fontaine qui donnerait 20 mètres cubes d'eau en 24 heures, ou 0m.c.0002315 par seconde (1). Ainsi la dépense en pouces d'eau serait exprimée par

---

(1) Le *pouce d'eau* est réellement la quantité d'eau qui s'écoule en une minute par un orifice circulaire d'un pouce de diamètre, le centre étant enfoncé de 7 lignes au-dessous du niveau; mais les hydraulistes ont beaucoup varié sur ce produit. On entend aujourd'hui par pouce d'eau, l'écoulement qui produit 672 pouces cubes par minute = 13.33 litres par minute = 560 pieds cubes en vingt-quatre heures = 19.2 mètres cubes en vingt-quatre heures = 800 litres ou kilogrammes par heure. La ligne d'eau est le 144e du pouce, ou 4.67 pouces cubes par minute = 55,5 litres par heure environ. Nous évaluons ici le pouce d'eau à 20 mètres cubes au lieu de 19.2, pour plus de simplicité.

20 mètres cubes sont ce que M. de Prony appelle le *double module* d'eau.

Digitized by Google

$$Q = 15028\ m\ d^2\ \sqrt{h}\ \text{pouces d'eau.}$$

Si à un réservoir plein d'eau on adapte une conduite rectiligne d'une longueur L, ayant partout même diamètre D, et entièrement ouverte à son extrémité, H étant la hauteur du niveau de l'eau dans le réservoir au-dessus de l'extrémité du tuyau par laquelle l'eau s'écoule (si cette extrémité était elle-même submergée, il faudrait retrancher sa profondeur au-dessous de l'eau), v la vitesse d'écoulement, q le volume d'eau dépensé en une seconde, on a

$$v = 26^m.40\ \sqrt{\frac{H\,D}{L + 36\,D}}$$

$$q = 20.73\ \sqrt{\frac{H\,D^5}{L + 36\,D}}\ \text{mèt. cub.}$$

ou Q désignant cette dépense en pouces d'eau

$$Q = 87749\ \sqrt{\frac{H\,D^5}{L}}\ \text{pouces.}$$

$$D = 0^m.01054\ \sqrt[5]{\frac{L\,Q^2}{H}}$$

Ces formules sont suffisamment exactes pour la pratique.

M. de Prony est parvenu aux formules suivantes, qui sont d'accord avec l'expérience pour des conduites qui ont jusqu'à 2280 mètres de longueur; mais il faut que $\frac{D}{L}$ ne dépasse pas $\frac{1}{100}$, D n'étant lui-même pas moindre qu'un centimètre.

Digitized by Google

Selon lui, l'unité de mesure étant le mètre,

$$v = 26.79 \sqrt{\frac{DH}{L}}$$

$$D = 0.1865 \sqrt[5]{\frac{L q^2}{H}}$$

Problème.

On demande de calculer, au moyen de la fo de M. de Prony, quelle serait la vitesse d'é ment par un diamètre d'un décimètre, la lon de la conduite étant de 20 mètres, et la haute niveau au-dessus de l'orifice = 4m ?

on a $v = 26.79 \sqrt{\frac{DH}{L}} = 26.79 \sqrt{}$

$$= 26.79 \times \frac{2}{14.14} = \frac{5358}{1414} = 3^{m}.789.$$

C'est au moyen de cette formule qu'on a for table suivante :

Digitized by Google

0.0075	0.008	0.0085	0.009	0.0095	0.10
1.038	1.072	1.105	1.137	1.168	1.198
1.467	1.515	1.562	1.607	1.651	1.694
1.797	1.856	1.913	1.969	2.023	2.075
2.075	2.143	2.209	2.273	2.335	2.396
2.320	2.396	2.470	2.542	2.611	2.679
2.541	2.625	2.706	2.784	2.860	2.935
2.745	2.835	2.922	3.007	3.090	3.170
2.935	3.031	3.124	3.215	3.303	3.389
3.114	3.215	3.314	3.410	3.503	3.594
3.281	3.389	3.493	3.594	3.693	3.789
3.441	3.554	3.663	3.770	3.873	3.974
3.594	3.712	3.826	3.937	4.045	4.150
3.741	3.864	3.983	4.098	4.210	4.320
3.882	4.010	4.133	4.253	4.369	4.483
4.018	4.150	4.278	4.402	4.523	4.640
4.150	4.286	4.418	4.546	4.671	4.792
4.278	4.418	4.554	4.686	4.825	4.940
4.402	4.546	4.686	4.822	4.954	5.083
4.523	4.671	4.815	4.954	5.090	5 223
4.640	4.792	4.940	5.083	5.222	5.358
4.755	4.911	5.062	5.209	5.351	5.490
4.867	5.026	5.181	5.331	5.477	5.620
[illegible]	[illegible]	[illegible]	5.455	[illegible]	[illegible]
6.050	6.248	6.441	6.627	6.809	6.986
6.138	6.340	6.535	6.724	6.908	7.088
6.225	6.430	6.627	6.820	7.006	7.189
6.311	6.518	6.719	6.914	7.103	7.288
6.396	6.606	6.809	7.006	7.198	7.385
6.480	6.692	6.898	7.098	7.293	7.482
6.562	6.777	6.986	7.189	7.385	7.577
6.644	6.862	7.073	7.278	7.477	7.671
6.724	6.945	7.158	7.366	7.568	7.764
6.804	7.027	7.243	7.453	7.657	7.856
6.882	7.108	7.327	7.539	7.746	7.947
6.960	7.189	7.410	7.625	7.833	8.037

Digitized by Google

Digitized by Google

C'est dans les ouvrages d'hydraulique qu'il faudra chercher les théories relatives aux conduites qui ne sont point dans toute leur longueur d'un même diamètre, et qui, en outre, offrent des coudes qui altèrent la vitesse; notre livre ne devant renfermer que des théories usuelles n'est point destiné aux ingénieurs de profession, qui seuls ont à résoudre des problèmes de ce genre.

Jets d'eau.

La différence de niveau entre l'eau sur la tête de la conduite et l'orifice de l'ajutage étant H, H′ pour deux réservoirs h h' sont les hauteurs des jets correspondans, on a

$$\frac{H - h}{H' - h'} = \frac{h^2}{h'^2}$$

On sait d'ailleurs qu'une hauteur de 5 pieds 1 pouce produit un jet de 5 pieds.

Problème.

On demande quelle hauteur il faudrait donner au réservoir pour produire un jet de 100 pieds.

Ici c'est H qui est inconnue

$$H' = 5\tfrac{1}{12},\ h' = 5\ h = 100,\ \text{et}$$

comme la formule devient

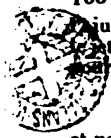
$$H = (H' - h')\ \frac{h^2}{h'^2} + h \quad \text{on a}$$

$$H = (5\tfrac{1}{12} - 5)\ \frac{10000}{25} + 100$$

$$= \tfrac{1}{12} \times 400 + 100 = 133^{pi.}4^{po.}$$

Si l'on incline l'ajutage, le jet décrit une parabole; en nommant a l'angle d'inclinaison qui fait

Digitized by Google



jaugage avec l'horizon, et h la hauteur à laquelle le jet h se fût élevé verticalement, on a théoriquement pour la hauteur du jet

$$h \sin 2a$$

et pour la distance horizontale D à laquelle il parviendra

$$D = 2h \sin 2a$$

PNEUMATIQUE.

L'air est un fluide pesant. Cette vérité, soupçonnée même avant Aristote, n'a été véritablement démontrée qu'en 1640, par Galilée, et confirmée un peu plus tard par les experiences de Torricelli et celles de Pascal.

La pression de l'air, comme celle de tous les autres fluides pesans, ne s'exerce pas seulement de haut en bas, elle comprime, dans tous les sens, les surfaces des corps que l'air touche ; et, comme il résulte des expériences de Pascal que l'air fait équilibre à une colonne de mercure de 28 pouces de hauteur, équivalente elle-même à une colonne d'eau de 32 pieds, il en résulte que lorsqu'un corps est exposé à l'air, chaque point de sa surface est pressé, comme il le serait par le poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur.

Problème.

Déterminer approximativement le poids de toute la masse d'air qui environne le globe.

Soit R le rayon moyen de la terre, r la hauteur donnée du filet du mercure auquel la pression de l'atmosphère fait équilibre ; π le rapport de la circonférence au diamètre, D la pesanteur spécifique du mercure. On cherchera les volumes de deux sphères, dont l'une a pour rayon $R + r$ et l'autre R,

Digitized by Google

et on retranchera le second volume du premier,

ce qui donne $\frac{4\pi(R+r)^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}$

$$\doteq 4\pi\left(R^2 r + r^2 R + \frac{r^3}{3}\right)$$

On multipliera ce reste par D, et observant que les termes qui contiennent r^2, et, à plus forte raison, r^3, peuvent sans erreur sensible être négligés, on aura pour l'expression très approchée du poids demandé,

$$4\pi D R^2 r = 12.56 \times 13.56 \times (6366198)^2 \times 0.76$$
$$= 5,236,279,225,196,350,000 \text{ kilogrammes},$$

13.56 étant la pesanteur spécifique du mercure, et 0,76 la hauteur moyenne du baromètre.

La densité des couches atmosphériques décroissant à mesure qu'on s'élève, il est clair que la colonne de mercure devra s'abaisser. Une évaluation grossière montre qu'en s'élevant de 10 mètres $\frac{1}{2}$ le baromètre baisse à peu près d'un millimètre, ou 1 ligne pour 12 toises. Avant de donner des moyens plus exacts de juger de la hauteur d'un lieu par celle de la colonne de mercure dans le tube, nous présenterons le tableau des pressions différentes que supportent une surface de 1 mètre carré, suivant les hauteurs du baromètre, que nous empruntons à la physique de M. Pouillet.

Digitized by Google

Tableau des pressions que supporte un mètre carré de surface, suivant les hauteurs du baromètre.

HAUTEUR DU BAROMÈTRE, en millimètres.	PRESSION sur un mètre carré, en kilogrammes	HAUTEUR DU BAROMÈTRE, en millimètres.	PRESSION sur un mètre carré, en kilogrammes.	HAUTEUR DU BAROMÈTRE, en millimètres.	PRESSION sur un mètre carré, en kilogrammes.
mm.	k.	mm.	k.	mm.	k.
500	6793	600	8152	700	9510
510	6929	610	8287	710	9646
520	7065	620	8423	720	9782
530	7201	630	8559	730	9918
540	7336	640	8695	740	10054
550	7472	650	8831	750	10189
560	7608	660	8967	760	10325
570	7744	670	9103	770	10461
580	7880	680	9238	780	10597
590	8016	690	9374	790	10733

On voit que le baromètre étant à 780, une surface de 1 mètre supporte 10597 kilo., et que cette énorme charge se réduit à 9782 kilo., quand le baromètre tombe à 720 : ainsi, la surface entière du corps étant à peu près de 1 mètre carré, nous sommes dans ces circonstances soulagés d'un poids de 815 kilo.

USAGE DU BAROMÈTRE POUR LA MESURE DES HAUTEURS.

Soit x la différence de niveau en mètres entre les deux stations, l la latitude du lieu qu'il n'est pas nécessaire de connaître exactement, H la hauteur du baromètre à la station inférieure, le thermomètre centigrade à l'air libre marquant T degrés, h, t les

Digitized by Google

mêmes choses à la station supérieure, θ la différence de température du baromètre dans les deux stations, on a

$$x = a\,(\log H - \log h - 0.00008\,\theta)\left[1 + 0.002\,(T + t)\right](1 + \alpha \cos 2l),$$

le log de a étant 4.2646526 et celui de α $\bar{3}.45287$.

Application à l'une des opérations de M. Ramond sur le Puy de-Dôme.

Baromètres.	Thermom. libres.	Tempér. du barom.	
Clermont. $H = 72^{cm}.852$	$T = 28°.3$	$24°.7$	Lat. l
Puy-de-D. $h = 70\ .565$	$t = 25°.5$	$27°.8$	$45°\ 46'$.
	$T + t = 53°.8$	$\theta = -3.1$	

Log $\alpha = \bar{3}.45287$	$\log H = 1.86244$
Log cos $2l = \bar{2}.42746 -$	$- 0.00008\,\theta = + \ 25$
$\bar{5}.88033 -$	$\log h = 1.84859$
	0.01410
	$\log \alpha = 4.26465$
	$\log\ 1.1076 = 0.04438$
	$\ldots\ldots\ \log = \bar{2}.14922$
Nombre $- 0.000076$	
$1 + \alpha \cos = 0.999924\ldots$	$\log = \bar{1}.99997$
	$\log x = 2.45822$

qui répond à $x = 287^{m}.22$.

On doit à M. Oltmans des tables qui n'exigent point un calcul aussi long pour arriver au résultat ;

Digitized by Google

nous les donnons ici d'après l'*Annuaire du bureau des longitudes.*

Table pour calculer la hauteur des Montagnes d'après les observations barométriques.

Soit h la hauteur barométrique de la station inférieure exprimée en millimètres; h' celle de la station supérieure; T et T' les températures centigrades des baromètres; t et t' celles de l'air.

On cherche dans la première table le nombre qui correspond à h, appelons-le a; on cherche de même celui qui correspond à h', désignons-le par la lettre b; appelons c le nombre généralement très petit qui, dans la deuxième table, est en face de T—T'; la hauteur approchée sera $a—b—c$. (Si T—T' était négatif, il faudrait écrire $a—b+c$.) Pour appliquer à cette hauteur approchée la correction dépendante de la température des couches d'air, il suffira de multiplier la *millième partie* de cette hauteur par la double somme 2 $(t+t')$ des thermomètres libres; la correction sera positive ou négative suivant que $t+t'$ sera lui-même positif ou négatif.

La seconde et dernière correction, celle de la latitude et de la diminution de la pesanteur, s'obtiendra en prenant, dans la troisième table, le nombre qui correspond verticalement à la latitude et horizontalement à la hauteur approchée; cette correction, qui ne peut jamais surpasser 28 mètres, est toujours additive.

Dans les cas très rares où la station inférieure serait elle-même très élevée au-dessus du niveau de la mer, il faudra appliquer au résultat une petite correction dont on trouverait la valeur à l'aide de la table quatrième.

Digitized by Google

TABLE PREMIÈRE, argument h' et h.

Millim.	Mètres.	Millim.	Mètres.	Millim.	Mètres.
	m.		m.		m.
370	418.5	405	1138.3	440	1798.4
371	440.0	406	1157.9	441	1816.5
372	461.5	407	1177.5	442	1834.5
373	482.9	408	1197.1	443	1852.5
374	504.2	409	1216.6	444	1870.4
375	525.4	410	1236.4	445	1888.3
376	546.6	411	1255.0	446	1906.2
377	567.8	412	1274.8	447	1924.0
378	588.9	413	1294.1	448	1941.8
379	609.9	414	1313.3	449	1959.6
380	630.9	415	1332.5	450	1977.3
381	651.8	416	1351.7	451	1994.9
382	672.7	417	1370.8	452	2012.6
383	693.5	418	1389.9	453	2030.2
384	714.3	419	1408.9	454	2047.8
385	735.0	420	1427.9	455	2082.8
386	755.6	421	1446.8	456	2065.3
387	776.2	422	1465.7	457	2100.2
388	796.8	423	1484.6	458	2117.6
389	817.3	424	1503.4	459	2135.0
390	837.8	425	1522.2	460	2152.3
391	858.2	426	1540.8	461	2169.6
392	878.5	427	1559.5	462	2186.9
393	898.8	428	1578.2	463	2204.1
394	919.0	429	1596.8	464	2221.3
395	939.2	430	1615.3	465	2238.4
396	959.3	431	1633.8	466	2255.5
397	979.4	432	1652.2	467	2272.6
398	999.5	433	1670.6	468	2289.6
399	1019.5	434	1679.0	469	2306.6
400	1039.4	435	1707.3	470	2323.6
401	1059.1	436	1725.6	471	2340.5
402	1079.1	437	1743.8	472	2357.4
403	1098.9	438	1762.1	473	2374.2
404	1118.6	439	1780.3	474	2391.1

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE PREMIÈRE.

Millim.	Mètres.	Millim.	Mètres.	Millim.	Mètres.
	m.		m.		m.
475	2407.9	510	2974.0	545	3502 5
476	2424.6	511	2989.6	546	3517.3
477	2441.3	512	3005.2	547	3531.8
478	2458.0	513	3020.7	548	3546 3
479	2474.6	514	3036.2	549	3560.8
480	2491.3	515	3051.7	550	3575.3
481	2507.9	516	3067.2	551	3589.8
482	2524.3	517	3082.6	552	3604.2
483	2540.8	518	3097.9	553	3618.6
484	2557.3	519	3113.3	554	3633.0
485	2573.7	520	3128.6	555	3647.4
486	2590.2	521	3143.9	556	3661.7
487	2606.6	522	3159.2	557	3676.0
488	2622.9	523	3174.4	558	3690.3
489	2639.2	524	3189.7	559	3704.6
490	2655.4	525	3204.9	560	3718.8
491	2671 6	526	3220.0	661	3733.0
492	2687.9	527	3235.1	562	3747.2
493	2704.1	528	3250.2	563	3761.3
494	2720.2	529	3265.3	564	3775.4
495	2736.3	530	3280.3	565	3789.5
496	2752.3	531	3295.3	566	3803.6
497	2768.3	532	3310.3	567	3817.7
498	2784.4	533	3325.3	568	3831.7
499	2800.4	534	3340.2	569	3845.7
500	2816.3	535	3355.1	570	3859.7
501	2832.2	536	3370.0	571	3873.7
502	2848.1	537	3384.8	572	3887.6
503	2864.1	538	3399.6	573	3901.5
504	2879.8	539	3414.4	574	3915.4
505	2895.6	540	3429.2	575	3929.3
506	2911.3	541	3443.9	576	3943.1
507	2927.0	542	3458.6	577	3956.9
508	2942.7	543	3473.3	578	3970.7
509	2958.4	544	3487.9	579	3984.5

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE PREMIÈRE.

Millim.	Mètres.	Millim.	Mètres.	Millim.	Mètres.
	m.		m.		m.
580	3998.2	615	4464.8	650	4905.6
581	4011.9	616	4477.7	651	4917.8
582	4025.6	617	4490.7	652	4930.0
583	4039.3	618	4503.6	653	4942.2
584	4052.9	619	4516.4	654	4954.4
585	4066.6	620	4529.3	655	4966.6
586	4080.2	621	4542.1	656	4978.7
587	4093.8	622	4554.9	657	4990.9
588	4107.3	623	4567.7	658	5003.0
589	4120.8	624	4580.5	659	5015.1
590	4134.3	625	4593.2	660	5027.2
591	4147.8	626	4606.0	661	5039.2
592	4161.3	627	4618.7	662	5051.2
593	4174.7	628	4631.4	663	5063.3
594	4188.1	629	4644.0	664	5075.3
595	4201.5	630	4656.7	665	5087.2
596	4214.9	631	4669.3	666	5099.2
597	4228.2	632	4682.0	667	5111.2
598	4241.6	633	4694.5	668	5123.1
599	4254.9	634	4707.1	669	5135.0
600	4268.2	635	4719.7	670	5146.9
601	4281.4	636	4732.2	671	5158.8
602	4294.7	637	4744.7	672	5170.6
603	4307.9	638	4757.2	673	5182.5
604	4321.1	639	4769.7	674	5194.3
605	4334.3	640	4782.1	675	5206.1
606	4347.4	641	4794.6	676	5217.9
607	4360.5	642	4807.0	677	5229.7
608	4373.7	643	4819.4	678	5241.4
609	4386.7	644	4831.7	679	5253.2
610	4399.8	645	4844.1	680	5264.9
611	4412.8	646	4856.4	681	5276.6
612	4425.9	647	4868.7	682	5288.3
613	4438.6	648	4881.0	683	5300.0
614	4451.9	649	4893.3	684	5311.6

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE PREMIÈRE.

Millim.	Mètres.	Millim.	Mètres.	Millim.	Mètres.
	m.		m.		
685	5323.2	720	5720.1	755	6098.0
686	5334.8	721	5731.1	756	6108.6
687	5346.4	722	5742.1	757	6119.1
688	5358.0	723	5753.1	758	6129.6
689	5369.6	724	5764.2	759	6140.1
690	5381.1	725	5775.1	760	6150.6
691	5392.7	726	5786.1	761	6161.1
692	5404.2	727	5797.1	762	6171.5
693	5415.7	728	5808.0	763	6182.0
694	5427.2	729	5819.0	764	6192.4
695	5438.7	730	5829.9	765	6202.8
696	5450.1	731	5840 8	766	6213.2
697	5461.5	732	5851.7	767	6223.6
698	5472.9	733	5862.5	768	6234.0
699	5484.3	734	5873.4	769	6244.4
700	5495.7	735	5884.2	770	6254.7
701	5507.1	736	5895.1	771	6265.8
702	5518 4	737	5905.9	772	6275.4
703	5529.8	738	5916.7	773	6285.7
704	5541.1	739	5927.5	774	6296.0
705	5552.4	740	5938.2	775	6306 2
706	5563.7	741	5949.0	776	6316.5
707	5575.0	742	5959.7	777	6326 7
708	5586.2	743	5970.4	778	6337.0
709	5597.5	744	5981.2	779	6347.2
710	5608.7	745	5991.9	780	6357.4
711	5619.9	746	6002.5	781	6367.6
712	5631.1	747	6013.2	782	6377.8
713	5642.2	748	6023.8	783	6388.0
714	5653.4	749	6034.4	784	6398.2
715	5664.6	750	6045.1	785	6408.3
716	5675.7	751	6055.7	786	6418.5
717	5686.8	552	6066.3	787	6428.6
718	5697.9	553	6076.9	788	6438.7
719	5709.0	754	6087.5	789	6448.8
				790	6458.9

Digitized by Google

TABLE DEUXIÈME, Argument. T — T′. Thermomètre centigrade du baromètre.

o.	m.	o.	m.	o.	m.	o.	m.
0.2	0.3	5.2	7.6	10.2	15.0	15.2	22.4
0.4	0.6	5.4	7.9	10.4	15.3	15.4	22.7
0.6	0.9	5.6	8.2	10.6	15.6	15.6	22.9
0.8	1.2	5.8	8.5	10.8	15.9	15.8	23.2
1.0	1.5	6.0	8.8	11.0	16.2	16.0	23.5
1.2	1.8	6.2	9.1	11.2	16.5	16.2	23.8
1.4	2.1	6.4	9.4	11.4	16.8	16.4	24.1
1.6	2.3	6.6	9.7	11.6	17.1	16.6	24.4
1.8	2.6	6.8	10.0	11.8	17.4	16.8	24.7
2.0	2.9	7.0	10.3	12.0	17.6	17.0	25.0
2.2	3.2	7.2	10.6	12.2	17.9	17.2	25.3
2.4	3.5	7.4	10.9	12.4	18.2	17.4	25.6
2.6	3.8	7.6	11.2	12.6	18.5	17.6	25.9
2.8	4.1	7.8	11.5	12.8	18.8	17.8	26.2
3.0	4.4	8.0	11.8	13.0	19.1	18.0	26.5
3.2	4.7	8.2	12.1	13.2	19.4	18.2	26.8
3.4	5.0	8.4	12.4	13.4	19.7	18.4	27.1
3.6	5.3	8.6	12.6	13.6	20.0	18.6	27.4
3.8	5.6	8.8	12.9	13.8	20.3	18.8	27.7
4.0	5.9	9.0	13.2	14.0	20.6	19.0	28.0
4.2	6.2	9.2	13.5	14.2	20.9	19.2	28.2
4.4	6.5	9.4	13.8	14.4	21.2	19.4	28.5
4.6	6.8	9.6	14.1	14.6	21.5	19.6	28.8
4.8	7.1	9.8	14.4	14.8	21.8	19.8	29.1
5.0	7.4	10.0	14.7	15.0	22.1		

Pour avoir la correction due à la température de l'air, multipliez la millième partie de la différence des nombres correspondans à h' et h par la double somme des thermomètres centigrades libres. Cette correction a le même signe que la somme de ces thermomètres.

On prend la somme ou la différence des nombres correspondans à h' et T — T′, selon que T — T′ est positif ou négatif.

Digitized by Google

ABLE TROISIÈME. Argument. Latitude sexagésimale du lieu (correction toujours additive).

HAUTEUR pprоch.	0°	5°	10°	15°	20°	25°
	m.	m.	m.	m.	m.	m.
200	1.2	1.2	1.2	1.0	1.0	1.0
400	2.4	2.4	2.4	2.2	2.0	2.0
600	3.4	3.4	3 4	3.2	3.0	2 8
800	4.5	4.5	4.5	4.3	4.1	3.8
1000	5.7	5.7	5.7	5.3	5.1	4.8
1200	7.0	7.0	6.8	6.4	6.0	5.8
1400	8.2	8.2	8.0	7.6	7.1	6.7
1600	9.2	9.2	9:0	8.8	8.2	7.6
1800	10.4	10.4	10.2	9.8	9.4	8.6
2000	11.6	11.5	11.3	11.0	10.4	9.6
2200	12.8	12.6	12.6	12.1	11.4	10.6
2400	14.0	14.0	13.8	13.3	12.5	11.6
2600	15.2	15.2	15.0	14.4	13.6	12.6
2800	16.6	16.5	16 4	15.6	14.8	13.6
3000	17.9	17.7	17.6	16.8	15.8	14.6
3200	19.1	18.9	18.7	18 0	17.0	15.7
3400	20.5	20.3	20.1	19.3	18.4	16.9
3600	21.8	21.7	21.4	20.4	19.6	18.0
3800	23.1	22.9	22.6	21.6	20.6	19.1
4000	24.6	24.4	24.0	22.9	21.9	20.3
4200	25.9	25.7	25.3	24.3	23.0	21.6
4400	27.5	27.3	26 8	25.8	24.3	23.0
4600	28.9	28.7	28.2	27.1	25.6	24.3
4800	30.4	30.2	29.6	28.4	27.0	25.5
5000	31.8	31.6	30.9	29.8	28.4	26.7
5200	33 0	32.8	32.1	31.0	29.7	28.0
5400	34.3	34.1	33.5	32.4	30.8	29 2
5600	35.7	35.5	34.8	33.7	32.1	30.2
5800	37.1	36.9	36.1	35.0	33.2	31.3
6000	38.5	38.3	37.5	36.3	34.3	32.3

Digitized by Google

Suite de la Table troisième.

HAUTEUR approch.	30°	35°	40°	45°	50°	55°
	m.	m.	m.	m.	m.	m.
200	0.8	0.8	0.6	0.6	0.6	0.4
400	1.8	1.7	1.4	1.2	1.0	0.8
600	2.6	2.4	2.0	1.8	1.6	1.2
800	3.5	3.1	2.8	2.4	2.0	1.7
1000	4.3	3.8	3.4	3.1	2.6	2.2
1200	5.1	4.6	4.2	3.6	3.1	2.6
1400	6.1	5.4	4.8	4.2	3.6	3.0
1600	7.0	6.2	5.6	4.8	4.1	3.4
1800	8.0	7.0	6.3	5.4	4.6	3.8
2000	8.8	7.8	7.0	6.0	5.1	4.2
2200	9.7	8.6	7.6	6.6	5.6	4.6
2400	10.6	9.4	8.4	7.2	6.1	5.1
2600	11.6	10.5	9.2	8 0	6.8	5.6
2800	12.6	11.4	10.0	8.8	7.4	6.2
3000	13.6	12.2	10.8	9 4	8.0	6.6
3200	14.6	13.1	11.5	10.1	8.6	7.0
3400	15.7	14.1	12.4	10.9	9.2	7.7
3600	16.7	15.0	13.4	11.6	9.8	8.2
3800	17.7	15.9	14.3	12.4	10.5	8.7
4000	18.7	17.0	15.1	13 1	11.2	9.4
4200	19 9	18.0	15.9	14.0	12.0	10.0
4400	21.1	19.1	16.9	15.0	12.9	10 8
4600	22.3	20.3	18.0	15.9	13.6	11.5
4800	23.4	21.3	19.9	16.7	14.3	12.1
5000	24.6	22.3	19.9	17.4	15.0	12.7
5200	25.7	23.3	20.8	18.2	15.7	13.3
5400	26 7	24.3	21.7	19.1	16.4	13.9
5600	27.8	25.3	22.6	19.9	17.2	14.5
5800	28.9	26.3	23.6	20.7	17.8	15.1
6000	30.0	27.3	24.6	21.5	18.5	15.7

Digitized by Google

TABLE QUATRIÈME, correction pour 1000m de haut.

h	Mètres.	h	Mètres.
400	1.71	600	0.63
450	1.39	650	0.42
500	1.11	700	0.22
550	0.86	750	0.03

Soit, par exemple, à la station inférieure, $h =$ 600 millimètres; la différence de niveau = 1500m, vous aurez,.. 1000 : 0.63 = 1500 : 0m.95, et la différence de niveau corrigée = 1500m.9. Cette correction est toujours additive.

TYPE DU CALCUL.

Hauteur de Guanaxuato, observée par M. de Humboldt. Latitude = 21°. A la station supérieure, hauteur du baromètre 600mm.95 = h'; thermomètre du baromètre + 21°.3 = t'; thermomètre libre + 21°.3 = t'. Au bord de la mer, hauteur du baromètre 763mm.15 = h; thermomètre du baromètre + 25°.3 = T; thermomètre libre + 25°,3 = t.

Table 1re { donne pour 763mm.15.... 6183m.5.. a
pour 600 .95.... 4280 .7.. b
pour T — T′ = 4°. 5 .9.. c

a—b—c ou hauteur approchée..... 1896 .9

1re correction = $\frac{1897}{1000} \times 2\,(t+t')$..... + 176 .9

Somme..... 2073 .7

2e corr., table IIe donne pour 2073 et 21° + 10 .6

Hauteur..... = 2084m.3

Digitized by Google

Problème.

On demande s'il est possible de produire un vide parfait sous le récipient d'une machine pneumatique.

Que V représente le volume du récipient et v celui du corps de pompe. Lorsque le piston s'élevera, l'air du récipient, en vertu de sa force élastique, se répandra dans le corps de pompe, et occupera par conséquent l'espace total $V + v$. Il entrera donc dans le corps de pompe une portion de sa masse représentée par $\frac{v}{V+v}$, et cette portion ne rentrera jamais dans le récipient. Si l'on désigne par 1 la quantité d'air qui s'y trouvait d'abord, on voit qu'après le premier coup de piston elle se trouvera réduite à $1 - \frac{v}{V+v} = \frac{V}{V+v}$. Après le second coup de piston, elle ne sera plus que $\frac{V}{V+v}$ de ce qu'elle était après le premier, c'est-à-dire qu'elle sera $\left(\frac{V}{V+v}\right)^2$. En continuant à raisonner ainsi, on voit qu'après

1 2 3 4 n

coups de piston, les quantités enlevées sont

$$\frac{v}{V+v}, \frac{v\,V}{(V+v)^2}, \frac{v\,V^2}{(v+V)^3}, \frac{v\,V^3}{(v+V)^4}, \frac{v\,V^{n-1}}{(v+V)^n},$$

et qu'il reste successivement dans la machine les fractions de ce volume exprimées par

$$\frac{V}{V+v}, \frac{V^2}{(V+v)^2}, \frac{V^3}{(V+v)^3}, \frac{V^4}{(V+v)^4}, \frac{V^n}{(V+v)^n}$$

Digitized by Google

Il n'est donc point possible d'obtenir un vide parfait, quel que soit le nombre n des coups de piston, puisque la fraction $\frac{V^n}{(V+v)^n}$, qui représente la quantité d'air restante, ne peut jamais devenir nulle, bien qu'elle aille toujours en s'affaiblissant à mesure que n augmente. Si l'on demandait :

Problème.

Quelle est la quantité d'air extraite après n coups de piston ?

Il est clair qu'il faudrait trouver la somme S des termes d'une progression par quotient, dont le premier terme est ici $\frac{v}{V+v}$.

La raison $\frac{V}{V+v}$ et le dernier terme $\frac{v\,V^{n-1}}{(V+v)^n}$, on obtiendrait (*Voy.* au dictionnaire à la fin du volume le mot *Progression*.)

$$S = 1 - \frac{V^n}{(V+v)^n}.$$

Problème.

Le rapport entre la capacité d'un des deux corps de pompe d'une machine pneumatique et un ballon dans lequel on veut faire le vide, est $5\frac{1}{2}$: Le ballon contient 5 litres 35 d'air ; on demande combien il restera d'air, après huit coups de piston, et l'on demande aussi les quantités extraites, et les restes, après le 1er, le 2e, le 3e coup de piston ? Nos formules donnent, =

Digitized by Google

Coups de piston.	Quantités extraites en litre.	Restes en litre.
1er.....	1.523	2.776
2e.....	1.111	2.666
3e.....	0.784	1.882
4e.....	0.553	1.328
5e.....	0.391	0.938
6e.....	0.276	0.662
7e.....	0.195	0.467
8e.....	0.137	0.330

il reste donc, après huit coups de piston, 0.330.

Quelle que soit la température, pourvu qu'elle soit constante, l'expérience démontre que, si l'on soumet une même masse d'air ou de gaz secs à des pressions diverses et successives, les volumes qu'elle occupe sont toujours réciproques aux pressions.

Soit donc p la pression initiale, V le volume pour cette pression, p' une nouvelle pression, V′ le volume correspondant, p'' une troisième, V″ le volume correspondant on aura

$$V' = \frac{V\,p}{p'}, \quad V'' = \frac{V'\,p'}{p''}.$$

Le volume v d'un gaz, sous la pression π, deviendrait à la pression moyenne de 0.76 $= \frac{v\,\pi}{0.76}$

Les densités des gaz sont proportionnelles aux pressions qu'ils supportent.

Sous une seule pression atmosphérique la densité de l'air étant à peu près la 770e partie de la densité de l'eau, il en résulte que sous une pression de 770 atmosphères, l'air est aussi dense que l'eau. Ainsi, au fond de la mer, à une profondeur de 770 fois 32 pieds, ou de 24640 pieds, qui font à peu près deux lieues, l'air serait plus pesant que

Digitized by Google

l'eau, et, quoiqu'à l'état gazeux, il ne pourrait point s'élever pour venir à la surface.

DILATATION.

Tous les corps se dilatent quand la température s'élève, et se condensent quand elle s'abaisse.

La dilatation est linéaire, superficielle ou cubique, selon que l'on considère la longueur, la surface ou le volume du corps qui y est soumis : δ étant la dilatation linéaire, D la dilatation superficielle, et Δ la dilatation cubique, on a ces relations approchées :

$$\Delta = 3\,\delta \qquad D = 2\,\delta.$$

Dans un même corps solide, la dilatation linéaire paraît être proportionnelle au nombre des degrés du thermomètre, comptés depuis o jusqu'à 100°.

Cette dilatation varie d'ailleurs pour chaque corps. On doit à MM. Laplace et Lavoisier une table de ces dilatations pour les corps les plus employés dans les arts.

δ étant la dilatation linéaire du corps par degré centésimal, le 100e du nombre de la table, ou le 80e si l'on se sert du thermomètre dit de Réaumur ;

t le nombre de degrés, l la longueur à o, l' celle du corps dilaté, S la surface à o, S' la surface après la dilatation, V le volume à o, V' le volume du corps dilaté.

On a assez exactement pour la pratique

$$V' = V\,(1 \pm 3\,\delta t),$$
$$S' = S\,(1 \pm 2\,\delta t)$$
$$l' = l\,(1 \pm \delta t).$$

On se sert du signe supérieur ou inférieur selon qu'il y a augmentation ou diminution de chaleur. Ces formules exigent qu'on connaisse les dimen-

Digitized by Google

sions à 0; mais si l'on voulait connaître une dimension V'' S'' l'', à la température t'', au moyen d'un V' S' l', à la température t', sans passer par les dimensions à une autre, on se servirait de

$$V'' = \frac{V' (1 + 3\delta t'')}{1 + 3\delta t'}$$

$$S'' = \frac{S' (1 + 2\delta t'')}{1 + 2\delta t'}$$

$$l'' = \frac{l' (1 + \delta t'')}{1 + \delta t'}$$

Table des Dilatations linéaires qu'éprouvent différentes substances, depuis le terme de la congélation de l'eau jusqu'à celui de son ébullition, d'après MM. LAPLACE et LAVOISIER.

Noms des substances.	Dilatations en décimales.	Dilatations en fractions vulgaires.
Acier non trempé.....	0,0010791	$\frac{1}{927}$
Argent de coupelle.....	0,0019097	$\frac{1}{523}$
Cuivre.....	0.0017[illegible]	$\frac{1}{582}$
Cuivre jaune ou laiton.	0,0018782	$\frac{1}{533}$
Étain de Falmouth.....	0,0021730	$\frac{1}{462}$
Fer doux forgé.....	0,0012205	$\frac{1}{819}$
Fer doux passé à la filière.	0,0012350	$\frac{1}{810}$
Flint-glass anglais.....	0,0008117	$\frac{1}{1248}$
Or de départ.....	0,0014661	$\frac{1}{682}$
Or au titre de Paris....	0.0015515	$\frac{1}{645}$
Platine.....	0,0008565	$\frac{1}{1167}$
Plomb.....	0,0028484	$\frac{1}{351}$
Verre de Saint-Gobain.	0,0008909	$\frac{1}{1122}$

Digitized by Google

Le mercure se dilate, en volume, depuis zéro jusqu'à l'eau bouillante de.... 0,018018 = $\frac{1}{55\frac{1}{2}}$.
L'eau de..... 0,0433 = $\frac{1}{23\frac{1}{2}}$
L'alcool de..... 0,1100 = $\frac{1}{9}$
Tous les gaz de..... 0,375 = $\frac{100}{267}$

Problème.

Quelle devrait être la longueur d'une barre de fer pour qu'une élévation de température de 25 degrés l'augmentât seulement d'un pouce, sachant d'ailleurs que la dilatation linéaire du fer est $\frac{1}{81937}$ par degré ?

Notre formule devient, à cause de la condition $L' = L + 1$,

$$L + 1 = L\left(1 + \frac{25^\circ \times 1}{81937}\right), \text{ d'où}$$

$$L = \frac{81937}{25} = 3277^{m}.5, \text{ environ 173 pieds.}$$

Si l'on avait demandé la longueur initiale pour une augmentation d'un pouce, en élevant la température de 0 à 100 degrés, on eût trouvé $\frac{1127}{1} = 819$; et effet, $\frac{1}{819}$ est la dilatation de la congélation à la température de l'eau bouillante.

Problème.

Une conduite en tuyaux de fonte a 1000 mètres de longueur, lorsque la température est de 20 degrés, on demande ce qu'elle deviendra à 15° au-dessous de zéro ?

On a $l' = l(1 - \delta t) = 1000(1 - 35 \times 0,0000[illegible]) = 1000\ (1 - 0.000377025) = 1000 - 0.[illegible] = 999^{m}.622975$. La contraction serait donc d'environ 4 décimètres.

Problème.

Un ballon de verre contient 10 litres à la tempé-

Digitized by Google

rature o, on demande quelle sera sa capacité à 25 degrés.

$$V' = V = (1 + 3\delta t) = 10(1 + 3 \times 25 \times 0.0000089694$$
$$= 10\,(1 + 00.0006727050) = 10.006727.$$

Le ballon contiendra donc près de 7 centimètres cubes de plus qu'à la glace fondante.

Problème.

Que deviendra à 45° un volume de 35litres.55 d'air à o ?

$$V' = V\,(1 + \Delta t) = 35.55\,(1 + 45 \times 0.00375)$$
$$= 35.55 + 5.999 = 41.549.$$

On fait observer que Δ représente ici la dilatation cubique *telle qu'*elle est donnée dans la table.

Problème.

Quel serait à o un volume de gaz de 153 litres 27 *pris à* 36° 5 ?

$$V'' = \frac{V'\,(1 + \Delta t'')}{1 + \Delta t'} = \frac{153.27\,(1 + 0)}{1 + 0.00375 \times 36.5}$$
$$= \frac{153.27}{113.6875} = 134.815.$$

Problème.

Ramener à 36° 25 le volume 83 litres 547 pris à 11°.23.

La même formule donnerait 91 litres 083.

Pour comprendre à la fois les variations de chaleur et de pression dans la même formule, soient v et v' les volumes d'un gaz sec aux températures centigrades respectives t. t', et sous les pressions p. p'; ces pressions étant mesurées par les colonnes de mercure du baromètre, on a

Digitized by Google

$$y' = y + y\,(k'' - 2\,k)\,t$$

Cela posé, reprenons l'équation

$$L = l - \frac{y}{2}.$$

La température s'élevant de t degrés, sa nouvelle valeur L′ deviendra, à cause de la dilatation,

$$L' = l - \frac{y}{2} + \left[l\,k - \frac{y}{2}\,(k'' - 2\,k) \right] t;$$

mais puisque le problème exige que cette valeur soit égale à la première, il faut égaler à o le terme variable affecté de t, et chercher, d'après cette condition, la valeur de y; on a donc

$$\left[l\,k - \frac{y}{2}\,(k'' - 2\,k) \right] t = 0, \text{ d'où}$$

$$2\,l\,k - y\,(k'' - 2\,k) = 0, \text{ d'où enfin}$$

$$y = l\,\frac{2\,k}{k'' - 2\,k}.$$

La dilatation linéaire du verre, ou k, est 0.000008757, la dilatation cubique du mercure, ou $k'' = 0.000184775$; en substituant ces nombres dans la formule, on trouve

$$y = \frac{l}{9{,}55}$$

d'où l'on voit que la longueur du cylindre de mercure doit être à très peu de chose près le $\frac{1}{10}$ de la longueur totale de l'appareil.

Problème.

Quelles doivent être les longueurs des tringles de cuivre et de fer d'un pendule composé de quatre

Digitized by Google

châssis assemblés, comme le représente la figure, pour que la longueur G S du pendule demeure constante, malgré les changemens de température?

Appelons L la longueur G S; $l = A C = B D$ = longueur des tringles extérieures en fer; $l' = A' C' = B' D'$ = longueur des tringles intérieures; $\lambda = A C = b d$ = longueur des tringles de cuivre, et $\lambda' = a' c' = b' d'$ = longueur des tringles intérieures de cuivre; S F = a, T G = T = la verge du pendule fixée au point T, mais glissant à frottement à travers C D et $c' d'$, F = dilatation du fer C celle du cuivre.

De la seule inspection de la figure on déduit cette équation,

$$L = a + l + l' + T - \lambda - \lambda'$$

Pour t degrés on aura la nouvelle valeur

$$L' = a + l + l' + T - \lambda - \lambda' + \left[(a + l + l' + T) F - (\lambda + \lambda') C \right] t.$$

De sorte que, pour l'immobilité du centre de gravité, il faut de même que dans le problème précédent poser la condition

$$(a + l + l' + T) F - (\lambda + \lambda') C = 0;$$

mais notre première équation donne

$$a + l + l' + T = L + \lambda + \lambda'.$$

En substituant cette valeur dans la dernière, il vient

$$(L + \lambda + \lambda') F - (\lambda + \lambda') C = 0,$$

d'où

$$(\lambda + \lambda') (C - F) = LF,$$

d'où enfin

$$\lambda + \lambda' = \frac{LF}{C - F}$$

Mais la dilatation du cuivre est à celle du fer, à très peu près, comme 5 est à 3; on a donc

Digitized by Google

$$\lambda + \lambda' = \frac{L\,3}{5-3} = \frac{3}{2}L,$$

c'est-à-dire que pour que la compensation soit établie, il faudra donner dans le système actuel à la somme des tringles de cuivre une valeur égale à trois fois la demi-longueur de l'appareil.

En général, *pour qu'il y ait compensation*, il faut que si l'on compare la somme des longueurs des branches verticales de l'un des métaux, à la somme des longueurs de l'autre métal, ces nombres soient entre eux en raison inverse des dilatations linéaires respectives.

APPLICATION CURIEUSE DE LA DILATATION DES SOLIDES.

Il y a quelques années, au Conservatoire des arts et métiers on s'aperçut que les deux murailles latérales d'une galerie s'écartaient l'une de l'autre, et tendaient ainsi à se renverser en dehors par l'effet du poids des planchers qu'elles supportaient. On perça de part et d'autre, dans ces murailles; des trous opposés également espacés, et l'on y introduisit de fortes barres de fer terminées par des vis que l'on serra en dehors avec de gros boulons. Cela suffisait pour retenir les murs, mais non pour les rapprocher, et aucune force humaine n'y aurait suffi. On imagina d'échauffer avec des lampes la moitié du nombre des barres, de deux une; alors celles-ci s'allongèrent davantage; leurs boulons, ne touchant plus contre le mur, ne se trouvèrent plus serrés : on put les tourner facilement; cela fait, on ôta les lampes. Les barres, en se refroidissant, se contractèrent et ramenèrent avec elles les murs opposés. Par l'effet de ce rapprochement, les autres barres qui n'avaient pas été chauffées se trouvèrent trop longues, et l'on put serrer leurs boulons. Alors on recommença de nouveau à échauffer les premières barres, ce qui permit de rapprocher les murs un peu davantage;

Digitized by Google

et, d'expérience en expérience, on aurait pu, si on l'avait voulu, les renverser en dedans par un mouvement contraire à celui que la pesanteur du plafond tendait d'abord à leur imprimer.

L'auteur de cette invention ingénieuse est M. Molard. (*Physique de Biot*, tome 1^er^, page 181.)

ACOUSTIQUE.

Le son est le résultat de certains mouvemens vibratoires produits dans les corps susceptibles de ces mouvemens. Ces vibrations sont communiquées à l'air, et de l'air à l'oreille.

Le son ne se transmet point dans le vide.

Plus ou moins les vibrations du corps sonore sont rapides, plus le son est aigu ou grave, et les limites de cette rapidité sont 32 et 8200 vibrations par seconde; le son produit par 8200 vibrations par seconde n'est même plus appréciable; l'autre est donné par un tuyau d'orgue de 32 pieds de longueur, ouvert à son extrémité. Un son fort ou faible parcourt 337^m^.118 par seconde. (Quand on n'a pas besoin d'une grande exactitude, on prend 340 mètres en nombres ronds pour la vitesse du son.) Cette vitesse est la même à toutes les hauteurs de l'atmosphère qu'au niveau de la mer, la température étant supposée constante; mais elle est beaucoup plus grande dans les solides et dans les liquides que dans les gaz.

Problème.

Un observateur situé à une certaine distance d'un édifice propre à produire un écho, a remarqué un chasseur placé entre lui et le même édifice. Le chasseur fait feu, et il s'écoule trois secondes entre cet instant et celui où il entend l'explosion; quatre secondes plus tard, il entend le coup répété une seconde fois. A quelle distance de l'observateur se trouvent le chasseur et l'édifice?

Digitized by Google

Le son parcourt 340 mètres par seconde. Le chasseur est donc à $3 \times 340 = 1020$; mais en même temps que le son parvient à l'observateur, il s'avance vers l'édifice avec la même vitesse, le frappe, et dans l'exemple actuel il est déjà sur le retour, lorsque l'explosion frappe pour la première fois son oreille. Il a donc mis, en effet, $4 \times 3 = 7''$ à lui parvenir, c'est-à-dire qu'il a parcouru 2380^m. Or, $2380 - 1020 = 1360$, la moitié de ce nombre $= 680$ sera la distance du chasseur à l'édifice, et $1020 + 680 = 1.700^m$ sera celle de l'observateur à l'édifice.

Si v est la vitesse du son dans un liquide, g la gravité, c la diminution de volume que subit le liquide par la compression d'un mètre du même liquide, on a

$$v = \frac{\sqrt{g}}{c}$$

Problème.

La diminution de volume pour l'eau pure on c est égale à 0.00000421. Quelle est la vitesse du son b dans ce liquide ?

$$v = \frac{\sqrt{g}}{c} \text{ devient } = \frac{\sqrt{9^m.8088}}{0.00000421} = 1525^m.8.$$

Cette vitesse est donc à peu près $4\frac{1}{2}$ plus grande que dans l'air.

Pour l'eau de mer on trouverait $4\frac{7}{10}$, pour le laiton $10\frac{1}{2}$, celle de l'air étant toujours prise pour unité.

VIBRATIONS DES CORDES.

Soit une corde cylindrique de rayon r, de longueur l, tendue par un poids P attaché à une de ses extrémités, δ ce que pèse l'unité de volume de la matière qui la compose, π la demi-conférence dont le rayon est 1, N le nombre de vibrations faites

Digitized by Google

par la corde, dans un temps donné T; soit enfin, g la gravité, V le volume de la corde, p son poids, on a

$$V = \pi r^2 l \qquad p = \pi r^2 l \delta$$

$$T = N r l \sqrt{\frac{\pi \delta}{g P}} \qquad N = \frac{T \sqrt{g P}}{r l \sqrt{\pi \delta}};$$

Si $T = 1''$, on a

$$N = \frac{\sqrt{g P}}{r l \sqrt{\pi \delta}};$$

Si n n' sont les nombres de vibrations de deux cordes, égales, tendues par des poids P P', ou de longueurs différentes l l', on a

$$\frac{n}{n'} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P'}} = \frac{l'}{l}.$$

Problème.

On demande de déterminer le nombre de vibrations pour tous les sons de la gamme naturelle majeure, en regardant comme son fondamental celui que rend une corde vibrant dans toute sa longueur, et sachant que les longueurs des cordes correspondantes à ces sons

	Ut	Re	Mi	Fa	Sol	La	Si	Ut, sont
$l =$	1	$\frac{8}{9}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{1}{2}$

$$N = \frac{\sqrt{g P}}{r l \sqrt{\pi \delta}}$$

devient pour *re*, l étant l'unité,

Digitized by Google

$$N = \frac{\sqrt{g P}}{r^{\frac{1}{2}} l \sqrt{\pi \delta}} = \frac{2\sqrt{g P}}{8 r l \sqrt{\pi \delta}};$$

pour *mi* $N = \frac{5\sqrt{g P}}{4 r^{\frac{1}{2}} l \sqrt{\pi \delta}}$;

pour *fa* $N = \frac{4\sqrt{g P}}{3 r l \sqrt{\pi \delta}}$,

et ainsi de suite, d'où l'on voit qu'en faisant

$$\frac{\sqrt{g P}}{r l \sqrt{\pi \delta}} = 1,$$

on aura pour les vibrations correspondantes

$$\frac{9}{8} \quad \frac{5}{4} \quad \frac{4}{3} \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{3} \quad \frac{15}{8} \quad 2.$$

Observation.

On voit que l'octave est donnée par la moitié de la longueur de la corde : il n'y a donc rien de plus facile que de prolonger ces séries autant qu'on le voudra. Les octaves aiguës du *re*, par exemple, seraient rendues par des longueurs $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ etc... de celle qui donne ce *re*, qui est elle-même les $\frac{8}{9}$ de la corde totale, on aurait donc

$$\frac{8}{9} \times \frac{1}{2}, \quad \frac{8}{9} \times \frac{1}{4}, \quad \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{4}{9}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{1}{9}$$

Digitized by Google

pour les longueurs de *re re re*, et le nombre de vibrations correspondantes serait $\frac{9}{4}$, $\frac{9}{2}$, 9 . . .

Problème.

On appelle *intervalle* de deux sons le rapport des nombres de vibrations relatives à ces deux sons. On demande de trouver les *intervalles* des tons successifs de la gamme ci-dessus.

On aura de *ut* à *re* $\frac{9}{8} = \frac{9}{8}$,

de *re* à *mi* $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{9}{8}} = \frac{40}{36} = \frac{10}{9}$,

de *mi* à *fa* $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{4}{5}} = \frac{16}{15}$,

et on formerait la série suivante :

	Tons mineurs.	Tons majeurs.	Semi-tons majeurs.
De *ut* à *re*.....		$\frac{9}{8}$	
re à *mi*	$\frac{10}{9}$		
mi à *fa*.....		.....	$\frac{16}{15}$
fa à *sol*.....		$\frac{9}{8}$	
sol à *la*	$\frac{10}{9}$		
la à *si*.....		$\frac{9}{8}$	
si à *ut*.....		.....	$\frac{16}{15}$

Digitized by Google

On voit donc qu'on appelle ton majeur l'intervalle $\frac{9}{8}$, et ton mineur celui $\frac{10}{9}$.

Problème.

Une note est diésée ou bémolisée lorsque sa valeur primitive (le nombre de vibrations) est multipliée par $\frac{25}{24}$ ou $\frac{24}{25}$. On demande le nombre de vibrations correspondant à toutes les notes diésées ou bémolisées de la gamme.

On trouve, pour le nombre de vibrations, *ut* étant toujours l'unité :

Notes.			Vibrations.
Ut	$=$	1	1
Ut dièse	$=$		$\frac{25}{24}$
Re bémol	$=$	$\frac{9}{8} \times \frac{24}{25} = \frac{216}{200} =$	$\frac{27}{25}$
Re	$=$		$\frac{9}{8}$
Re dièse	$=$	$\frac{9}{8} \times \frac{25}{24} = \frac{225}{192} =$	$\frac{75}{64}$
Mi bémol	$=$	$\frac{5}{4} \times \frac{24}{25} = \frac{120}{100} =$	$\frac{6}{5}$
Mi	$=$		$\frac{5}{4}$
Mi dièse	$=$	$\frac{5}{4} \times \frac{25}{24} =$	$\frac{125}{96}$
Fa bémol	$=$	$\frac{4}{3} \times \frac{24}{25} = \frac{96}{75} =$	$\frac{32}{25}$
Fa	$=$		$\frac{4}{3}$

Digitized by Google

Fa dièse $= \frac{4}{3} \times \frac{25}{24} = \frac{100}{72} = \frac{25}{18}$

Sol bémol $= \frac{3}{2} \times \frac{24}{25} = \frac{72}{50} = \frac{36}{25}$

Sol $= \frac{3}{2}$

Sol dièse $= \frac{3}{2} \times \frac{25}{24} = \frac{75}{48} = \frac{25}{16}$

La bémol $= \frac{5}{3} \times \frac{24}{25} = \frac{120}{75} = \frac{8}{5}$

La $= \frac{5}{3}$

La dièse $= \frac{5}{3} \times \frac{25}{24} = \frac{125}{72}$

Si bémol $= \frac{15}{8} \times \frac{24}{25} = \frac{360}{200} = \frac{9}{5}$

Si $= \frac{15}{8}$

Si dièse $= \frac{15}{8} \times \frac{25}{24} = \frac{375}{192} = \frac{125}{64}$

Ut bémol $= 2 \times \frac{24}{25} = \frac{48}{25}$

Ut $= 2$

Il suffit pour les octaves plus basses ou plus élevées de multiplier ou de diviser ces valeurs par la puissance de 2, qui marque le rang de ces octaves.

Problème.

On demande de composer une série de sons qui commencent par le *sol* de la gamme naturelle d'*ut*, et dont les intervalles se succèdent dans le même ordre que ceux de cette gamme.

Digitized by Google

Comparons les intervalles des deux gammes; on a, comme nous l'avons vu,

Intervalles	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	
de	ut	re	mi	fa	sol	la	si	ut	re	mi	fa	sol
Intervalles		$\frac{10}{9}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{10}{9}$		$\frac{16}{15}$	$\frac{9}{8}$			
de		sol	la	si	ut	re		mi	fa			sol

On voit que dans chacune les intervalles de la première à la seconde note et de la seconde à la troisième, diffèrent fort peu; en effet, le rapport de

ces intervalles est $\frac{\frac{10}{9}}{\frac{9}{8}} = \frac{80}{81}$ qui ne diffère de

l'unité que de $\frac{1}{81}$. Cette quantité est inappréciable à l'oreille; il n'y a donc pas lieu d'altérer ces intervalles, et généralement on peut confondre, dans la pratique de la musique, l'intervalle $\frac{9}{8}$ avec celui $\frac{10}{9}$; les intervalles de *mi* à *fa*, de *fa* à *sol*, de *sol* à *la*, dans la première, sont exactement les mêmes que ceux de *si* à *ut*, de *ut* à *re*, de *re* à *mi*, dans la seconde; mais l'intervalle $\frac{9}{8}$ de *la* à *si*, diffère sensiblement de celui $\frac{16}{15}$ de *mi* à *fa*. On ne peut abaisser le *mi*, car on altérerait son intervalle en *re*, qui est ce qu'il doit être pour le but que nous proposons. Il faut donc *diéser* le *fa* en le multipliant par $\frac{25}{24}$; l'intervalle de *mi* à *fa* deviendra $\frac{16}{15} \times \frac{25}{24}$

Digitized by Google

$= \frac{400}{361} = \frac{10}{9}$ sensiblement équivalent, comme l'on sait, à l'intervalle de *la* à *si*; mais puisque *fa* est ainsi élevé d'un demi-ton, son intervalle à *sol* est diminué d'un demi-ton; il n'est donc plus que $\frac{9}{8} \times \frac{24}{25} = \frac{27}{25}$, et c'est ce qu'il doit être; car $\frac{27}{25}$ devient égal à $\frac{16}{15}$, en le multipliant par $\frac{81}{80}$, quantité qui diffère trop peu de l'unité pour n'être point confondue avec elle.

Il suffit donc, lorsqu'on veut prendre *sol* pour tonique, de diéser le *fa*.

Si l'on eût pris *fa* pour *tonique*, on eût trouvé qu'il fallait bémoliser le *si*.

Tartini a le premier reconnu que lorsqu'on fait résonner à la fois deux cordes assez rapprochées, et donnant deux sons différens, un troisième son grave et faible d'intensité se fait entendre en même temps; il n'examina point à fond toutes les circonstances de ce phénomène. Le général Blein a récemment complété la série de ces expériences; il a trouvé qu'au lieu d'une résultante, il y en avait le plus souvent une seconde plus ou moins sensible, et il est parvenu à cette loi fort simple. Les deux sons soumis à l'expérience étant représentés l'un par son nombre de vibrations n, et l'autre par le nombre $n + m$, les deux résultantes sont constamment $n - m$ et m.

Problème.

On demande la résultante de la consonnance *ut sol*, *ut* étant 1 et *sol* $\frac{3}{2}$, on a $n = 1$, $n + m = 1.5$, d'où $m = 0.5$. Les résultantes sont donc $n - m = 1 - 0.5 = 0.5$, et $m = 0.5$, c'est-à-dire qu'elles sont toutes deux $= \frac{1}{2}$, ou qu'on obtient l'*ut* au-dessous de celui dont on est parti.

Digitized by Google

Problème.

On demande de déterminer le nombre absolu de vibrations que font par seconde les quatre cordes à vide du violoncelle *ut*, *sol*, *re*, *la*, supposant que l'*ut* fondamental qui répond au son le plus bas du bourdon, fait 125 vibrations simples par seconde.

Il est clair que les vibrations correspondantes sont entre elles comme les nombres de la table

$$1 : \frac{3}{2} : \frac{9}{4} : \frac{10}{3},$$

ou comme leurs octaves; il suffit donc de multiplier ces nombres par 125, et l'on obtient

ut	sol	re	la
125 :	$187\frac{1}{2}$:	$281\frac{1}{4}$:	$416\frac{2}{3}$.

Problème.

En supposant qu'une corde à boyau de 4 pieds, et d'une demi-ligne de diamètre, tendue par un poids de 25 livres, fasse entendre le *sol* à vide du violoncelle, et conséquemment exécute $187\frac{1}{2}$ vibrations par seconde, on demande combien de vibrations exécutera dans le même temps une autre corde de même nature, mais de 5 pieds de long, d'une ligne de diamètre, et tendue par un poids de 36 livres; et à quel son de notre échelle musicale répondra cette corde.

On a $\frac{n}{n'} = \frac{r' l' \sqrt{P}}{r l \sqrt{P'}}$ ou $\frac{187.5}{n'}$.

= en exprimant les longueurs en lignes

$$\frac{720 \times 0.5 \sqrt{25}}{576 \times 0.25 \sqrt{36}} = \frac{360 \times 5}{144 \times 6} = \frac{1800}{864}$$

d'où $n' = \frac{864 \times 187.5}{1800} = \frac{1620}{18} = 90$ vibrations.

Digitized by Google

Ce son est intermédiaire entre le *fa* dièse et le *sol*, au-dessous du dernier *ut* du violoncelle.

Problème.

On demande quelle devrait être la tension de la corde précédente, toutes choses égales d'ailleurs, pour qu'elle fît entendre le son la^3 de la troisième corde à vide du violon.

La tension demandée devrait être équivalente à celle que produirait un poids d'environ 493 livres. 73.

Problème.

En reprenant la première corde de l'avant-dernier problème, on demande à quelle longueur il faudrait la réduire pour qu'elle fît entendre le son mi^4 de *la chanterelle* à vide du violon.

La longueur devrait être 7 pouces $\frac{2}{3}$ de ligne.

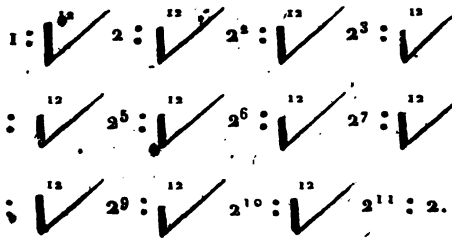
Personne n'ignore que dans les instrumens à sons *fixes*, tels que le piano, l'orgue, la guitare, les dièses et les bémols sont confondus, c'est-à-dire qu'une note inférieure diésée est la même que la note supérieure bémolisée. Nous avons vu cependant que ces sons ne devaient point être confondus, puisqu'ils n'avaient point la même valeur. On peut donc dire qu'à la rigueur *les instrumens à sons fixes ne sont jamais justes*; on y divise la gamme en douze demi-tons égaux et intervalles, et c'est en cela que consiste le *tempérament*. On faisait autrefois subir des altérations aux accords les moins usités; aujourd'hui que l'art musical s'est perfectionné, et qu'il n'existe plus d'accords qu'on puisse regarder comme rarement employés, on est revenu au *tempérament égal*.

Problème.

On demande le calcul d'un tempérament égal, c'est-à-dire de diviser l'octave en douze semi-tons égaux.

Digitized by Google

Les sons cherchés seront exprimés par les termes de cette progression géométrique



Ces valeurs, calculées par le moyen des logarithmes, donnent en vibrations

ut	1.00000
ut dièse ou *re* bémol	1.05946
re	1.12246
re dièse ou *mi* bémol	1.18921
mi	1.25992
fa	1.33484
fa dièse ou *sol* bémol	1.41421
sol	1.49831
sol dièse ou *la* bémol	1.58740
la	1.68179
la dièse ou *si* bémol	1.78180
si	1.88775
ut	2.00000

Nous terminerons ces notions très imparfaites d'acoustique par la table suivante, qui pourra servir à construire un monocorde, et par suite à accorder un piano, opération qu'il n'est point toujours facile de faire faire, à la campagne surtout où les accordeurs sont rares.

Digitized by Google

TABLE *des distances en millimètres qu'on doit laisser entre les parallèles qui partagent la longueur d'un monocorde de* 5 *décimètres pour produire les douze demi-tons de la gamme par tempérament égal.*

	PREMIÈRE OCTAVE. Distance du sillet fixe d'en bas jusqu'au trait.	SECONDE OCTAVE. Distance du sillet fixe d'en haut jusqu'au trait.
Ut	0 sillet	250
Ut dièse, *re* bémol	28.06	235.97
Re	54.55	222.72
Re dièse, *mi* bémol	79.55	210,22
Mi	103.15	198,42
Fa	125.42	187,29
Fa dièse, *sol* bémol	146.50	176.25
Sol	166.29	166.85
Sol dièse, *la* bémol	185.02	157.49
La	202.70	148.65
La dièse, *si* bémol	219.38	140.31
Si	235.13	132.44
Ut	250.00	125

Il est évident qu'on peut faire varier ces nombres proportionnellement à la longueur du monocorde, c'est-à-dire à la distance des sillets fixes; par exemple, on doublerait tous ces nombres pour une distance de 1 mètre. Une octave étant bien accordée, le reste n'offre plus aucune difficulté; car le premier *ut*, pris pour point de départ, donnera successivement tous les *ut* par l'accord d'octave; de même le *re* donnera tous les *re*, le *mi* tous les *mi*, et ainsi de suite.

Digitized by Google

DE LA LUMIÈRE.

Dans un milieu transparent et de propriétés matérielles, homogènes, la transmission de la lumière se fait en ligne droite.

La vitesse de la lumière paraît être constante; elle nous vient du soleil en 8 minutes 13 secondes $\frac{2}{10}$; c'est-à-dire qu'elle parcourt 70,000 lieues par seconde.

L'intensité de la lumière est en raison inverse du carré de la distance.

L'intensité de la lumière émise par une surface dans une direction donnée, est proportionnelle au sinus de l'angle formé par la surface et la direction des rayons.

Problème.

On demande de trouver sur la droite qui joint deux corps lumineux, le point qui en est également éclairé, en supposant leur distance de 125 centimètres et leurs lumières proportionnelles aux nombres 16 et 25.

Soit (*fig.* 15), la droite $a\,b$ qui joint les corps lumineux, l'un en a, l'autre en b, le premier étant plus grand que le second; soit c le point cherché, x la distance $a\,c$, il résulte que $b\,c = 125 - x$; la force de la lumière en a étant 25 à la distance 1, elle sera, d'après la loi donnée plus haut, $\frac{25}{x^2}$ à la distance x. Pareillement la force de la lumière en b étant 16 à la distance 1, elle deviendra $\frac{16}{(125-x)^2}$ à la distance $125-x$. Ces dernières forces étant supposées égales, on a

Digitized by Google

$$\frac{25}{x^2} = \frac{16}{(125 - x)^2},$$

d'où $25\,(125 - x)^2 = 16\,x^2$, d'où enfin $9\,x^2 - 6250\,x = -390625$, et par suite

$$a = \frac{3125}{9} \pm \frac{2500}{9}.$$

Les deux valeurs de x sont 625 et $69\frac{4}{9}$; l'une et l'autre satisfont au problème. La valeur $69\frac{4}{9}$ désigne le point c, placé entre les deux corps lumineux; et la valeur 625 désigne un autre point c', situé sur le prolongement de la droite ab, du côté de la lumière la plus faible.

Problème.

Aux deux extrémités d'une droite de 60 pouces, se trouvent deux lumières dont les intensités sont dans le rapport de 4 à 9. On demande à trouver sur cette ligne le point intermédiaire également éclairé de part et d'autre.

Réponse. Le point cherché se trouvera à 24 pouces de distance de la lumière la plus faible.

Problème.

Sachant que dans le problème précédent, le rapport d'intensité des deux lumières est 16 à 25, et qu'un point également illuminé se trouvait situé à $8\frac{8}{9}$ pouces de distance de la lumière la plus faible, on demande à connaître l'intervalle des deux lumières.

Réponse. Cet intervalle est de 20 pouces.

Problème.

Sachant que la distance qui séparait les deux lumières était de 32 pieds, et qu'un plan intermé-

Digitized by Google

diaire produisait de part et d'autre des ombres de même intensité, on demande le rapport entre les pouvoirs éclairans des deux corps lumineux.

Réponse. Ce rapport est 4 à 25.

Problème.

Etant donnés, les demi-diamètres (*fig.* 16) BK, CO, et la distance BC des centres de deux globes, déterminer la longueur BA de l'axe du cône d'ombre du plus petit globe.

Tirez KD parallèle à BC, à cause des parallèles BK, CO, on a BK = CD et BC = KD; les triangles KDO, ACO sont semblables; donc

$$DO : OC :: DK : CA$$

ou

$$CO - BK : CO :: CB : CA$$

ôtant donc CB de CA, reste BA qu'on cherche.

Il est évident que la partie éclairée dont on parle, renferme les pénombres.

Application.

Une sphère de six pouces de diamètre se trouve éclairée par un globe lumineux d'un volume mille fois plus considérable; l'intervalle qui sépare les centres des deux corps est égal à cinq fois le diamètre du corps éclairant : on demande la longueur de l'axe du cône d'ombre.

Réponse. La longueur mathématique de cet axe devra être $33\frac{1}{3}$ pouces; mais dans la réalité il serait beaucoup plus court.

Problème.

Sachant que dans une expérience analogue, la sphère lumineuse a dix pieds de diamètre, et le globe opaque trois pieds, on demande quel devrait être l'intervalle entre les centres des deux corps, pour que l'ombre s'étendît à la distance de 40 pieds.

Réponse. L'intervalle cherché est $93\frac{1}{3}$ pieds.

Digitized by Google

Problème.

Le diamètre du corps éclairé étant 8a, et la distance qui sépare les deux centres 500, on demande quel devrait être le diamètre du globe lumineux pour que l'axe du cône d'ombre fût égal au rayon du corps opaque.

Réponse. Le diamètre cherché devra être de 135 pouces.

RÉFLEXION DE LA LUMIÈRE.

Le rayon réfléchi et le rayon incident sont tous deux contenus dans un même plan normal à la surface d'incidence.

L'angle de réflexion et l'angle d'incidence sont toujours égaux entre eux.

Problème.

Etant donnés un point quelconque O situé sur l'axe AO d'un miroir sphérique, concave ou convexe (*fig.* 17, 18 et 19), et un rayon incident OM infiniment proche de l'axe AO, trouver le point F de l'axe par où passe le rayon réfléchi au point M.

Tirez au centre C de la surface sphérique la droite MC; la droite MC étant une normale OMG ou CME, est l'angle d'incidence, et en faisant CMF = OMG, le rayon réfléchi est MD, qui va rencontrer l'axe OA en F.

Appelant $\pm d$ la distance de l'objet au miroir ($+d$ si le miroir est concave, $-d$ s'il est convexe), r = le rayon du miroir, f la distance du foyer au miroir, on a

pour les miroirs concaves,

$$f = \frac{dr}{2d - r}$$

pour les miroirs convexes,

$$f = \frac{dr}{2d + r}$$

Digitized by Google

et pour la *grandeur des images*, O étant l'objet, I l'image, on a
pour les miroirs concaves,

$$\frac{I}{O} = \frac{r}{2d - r},$$

et pour les miroirs convexes,

$$\frac{I}{O} = \frac{r}{2d + r};$$

dans les miroirs plans,

$$f = -d,$$

c'est-à-dire que les images sont toujours autant au-delà du miroir que l'objet est en deçà.

Problème.

Étant donné un petit segment d'un miroir sphérique convexe d'un rayon de courbure égale à 10 pieds, on demande à quelle distance, derrière la surface réfléchissante, devra se former l'image d'un petit objet lumineux placé au-devant du miroir à 9 pieds de sa surface.

$$f = \frac{dr}{2d + r} \text{ devient } = \frac{9 \times 10}{18 + 10} = \frac{90}{28}$$

$$= 3^{\text{pieds}}.214.$$

Problème.

Avec les mêmes données, on demande la grandeur linéaire de l'image relativement à celle de l'objet.

$$\frac{I}{O} = \frac{r}{2d + r}$$

Digitized by Google

donne, en prenant pour unité la grandeur de l'objet,

$$I = \frac{10}{18 + 10} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

ou les 0.357 de l'objet.

Problème.

En supposant que l'objet soit placé à 100 pieds de distance du miroir précédent, toujours sur le prolongement de l'axe, on demande à déterminer le lieu et la grandeur relative de l'image derrière le miroir,

$$f = \frac{dr}{2d + r} \text{ devient } = \frac{100 \times 10}{200 + 10} = \frac{1000}{210}$$

$$= 4^{p}.762$$

et la grandeur de l'image

$$I = \frac{r}{2d + r} = \frac{10}{210} = \frac{1}{21}$$

de celle de l'objet.

Problème.

A quelle distance de la surface du même miroir faudrait-il placer l'objet pour que l'image fût à peu près le $\frac{1}{10}$ de l'objet?

De $I = \frac{r}{2d + r}$, on tire $d = \frac{r - Ir}{2I}$

$$= \frac{(10 - 1)\ 10}{2} = \frac{90}{2} = 45 \text{ pieds.}$$

Il faudrait donc placer l'objet à 45 pieds du miroir.

Digitized by Google

Exercice.

Un objet de $0^m.05$ est placé à 3 mètres de distance d'un miroir convexe dont le rayon est $0^m.75$; on demande la position et la grandeur de l'image.

L'image sera à 0.33 et sa grandeur sera $0^m.0056$.

Problème.

Quel devrait être le rayon de courbure d'un petit miroir convexe, pour qu'un petit objet, placé à 200 pouces de distance de sa surface, y parût 100 fois plus petit?

Ici $I = \frac{1}{100}$, et de $I = \frac{r}{2d + r}$ on tire

$$r = \frac{2dI}{1 - I} = \frac{400 \times \frac{1}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{4}{\frac{99}{100}} = \frac{400}{99}$$

$$= 4^{\text{pouces}}.\frac{4}{99},$$

tel est le rayon cherché.

Problème.

Quel devrait être le rayon de courbure d'un miroir concave, pour produire au-devant de sa surface, le même effet que produirait par derrière le miroir convexe précédent?

$I =$ toujours $\frac{1}{100}$, et de la formule $I = \frac{2d - r}{r}$ on tire

$$r = \frac{2dI}{1 + I} = \frac{400 \times \frac{1}{100}}{1.01} = \frac{4}{1.01} = \frac{400}{101}$$

$$= 3^{\text{pouces}}.96.$$

Problème.

Étant donné un segment d'un petit nombre de degrés d'un miroir sphérique concave de 8 pieds de

Digitized by Google

rayon, on demande le lieu et la grandeur relative de l'image d'un objet placé au-devant sur l'axe du miroir, à trois pieds de sa surface.

$$f = \frac{dr}{2d - r} \text{ devient} = \frac{3 \times 8}{6 - 8} = \frac{24}{-2} = -12.$$

L'image se trouvera à 12 pieds de distance, derrière la surface réfléchissante.

$$I = \frac{r}{2d - r} \text{ donne } I = \frac{8}{16 - 8} = \frac{8}{2} = 4.$$

L'image sera donc quatre fois plus grande que l'objet.

Exercice.

Le rayon du miroir étant 0.75, la grandeur réelle de l'objet 0.06, la distance 3 mètres, on trouverait la position de l'image entre le centre et le foyer à 0.428, et pour sa grandeur apparente $0^m.007$.

De même, un objet de 35 millimètres, placé à $0^m.45$ de distance du même miroir, donnerait une image de $0^m.175$ à $2^m.25$.

Problème.

A quelle distance du miroir du dernier problème faudrait-il placer l'objet pour que son image parût à peu près amplifiée trois fois?

Il faut faire $I = 03$ dans $I = \frac{r}{2d - r}$; on a

$$d = \frac{r + Ir}{2I} = \frac{8 + 3 \times 8}{2 \times 3} = \frac{32}{6} = 5 \text{ pieds } 4 \text{ pouces.}$$

Les miroirs cylindriques, coniques, prismatiques et pyramidaux, ne sont guère que de pures curiosités; ils servent à défigurer les objets auxquels on en présente, ou à faire paraître régulière l'image

Digitized by Google

d'un objet défiguré. Nous donnerons, d'après Lacaille, le problème suivant.

Problème.

Dessiner sur un plan un objet défiguré, de sorte qu'en posant verticalement, et en un endroit marqué sur ce plan, un miroir cylindrique d'un rayon donné, cet objet paraisse droit et régulier, vu d'un point donné.

Sur un plan à part on dessine cet objet régulièrement, et selon toutes les dimensions qu'il doit avoir; en sorte, cependant, que sa plus grande largeur n'excède pas la longueur de la corde d'un arc de 130 à 140 degrés du cylindre. On renferme ce dessin dans un parallélogramme (*fig.* 20) rectangle A F K *a* (qu'on appelle le *ponsif*). On divise ce rectangle en plusieurs petits carrés ou autres rectangles égaux, afin de partager le dessin en plusieurs petites parties. Sur le plan donné on décrit la place où la base du cylindre doit être posée, c'est une portion de cercle F T K (*fig.* 21) dont le rayon doit être égal à celui de la base du cylindre, et on y porte une corde F K, égale au côté F K du ponsif, qui répond au pied de la figure dessinée. On divise aussi la corde F K comme la droite F K du ponsif. Par le milieu H de la corde F K, on tire une perpendiculaire H O, qu'on termine en O, au point au-dessus duquel on veut que l'œil soit placé, pour regarder le cylindre. Du point O, on tire par les divisions de la corde F K, des droites indéfinies O A′, O *g*′, O *h*′, O *i*′, O *k*′, sur l'une desquelles, comme O F, on élève une perpendiculaire O V, égale à la hauteur à laquelle on veut que l'œil soit au-dessus du point O, c'est-à-dire au-dessus du plan du dessin défiguré. Sur la même droite O F, et en partant du point F, où elle coupe K F, on élève une perpendiculaire F A, égale au côté A F du ponsif, et divisée comme lui. Par V, et par les points de division de F A, on tire des droites indéfinies V F, V E′, V D′, V C′, V B′,

Digitized by Google

V A′, qui vont rencontrer la droite O A′, en des points par lesquels on mène à F K les parallèles E′ e′, D′ d′, C′ c′, B′ b′, A′ k′; et l'on a, selon les lois de la perspective, un trapèze K F A′ k′, qui est la perspective du ponsif A K, vu du point où l'œil doit être placé pour voir l'objet dans le cylindre, c'est-à-dire vu d'un point élevé au-dessus de O d'une quantité égale à O V.

Par le centre Q de l'arc F T K du pied du cylindre, et par les points d'incidence F, S, T, K, où les droites ou rayons O F, O G, O I, O K, rencontrent cet arc, on mène les cathètes d'incidence Q L, Q P, Q R, Q X, puis les droites indéfinies F *a*, S *g*, T *i*, K *k*, qui fassent les angles *a* F L = O F L, *g* S P = O S P, *i* T R = O T R et *k* K X = O K X, et qui sont les rayons réfléchis. Sur ces droites ou rayons réfléchis, on porte les divisions des droites correspondantes du trapèze perspectif, c'est-à-dire des droites F A′, S *g*′, M *h*′, T *i*′, K *k*′; et par tous les points trouvés de la sorte, on fait passer des courbes qui sont presque des arcs de cercles concentriques, dont le centre est en H, et qui représentent les droites A *a*, B *b*, C *c*, D *d*, E *e*, F K du ponsif, de même que F *a*, G′ *g*, H′ *h*, I *i*, K *k* représentent les côtés F A, G *g*, H *h*, I *i*, K *a* du ponsif, et qu'enfin chacun des espaces ou trapèzes mixtilignes représentent les petits carrés ou rectangles du ponsif. Si donc on place le cylindre sur l'arc F T K, et l'œil au point de vue déterminé, on verra dans le cylindre une image régulière du ponsif; et par conséquent, en rapportant sur chaque trapèze mixtiligne les parties de la figure dessinée dans chaque carré ou rectangle correspondant dans le ponsif, on aura la figure dépravée qu'on demande.

RÉFRACTION DE LA LUMIÈRE.

Un rayon de lumière change généralement de direction lorsqu'il passe d'un milieu dans un autre.

Digitized by Google

Si M N (*fig.* 22) est la surface plane qui sépare deux milieux, A B un rayon de lumière qui se réfracte au point B, selon B F, par exemple; si, de plus, C B G est une perpendiculaire en B, A B C ou D B G est ce qu'on appelle l'angle d'incidence, F B G est l'angle de réfraction, A B est le rayon incident, B F le rayon réfracté.

Le rayon incident et le rayon réfracté sont toujours situés dans un même plan perpendiculaire à la surface qui sépare les milieux.

L'angle d'incidence est plus grand que l'angle de réfraction, quand la lumière passe d'un milieu moins dense dans un milieu plus dense, et réciproquement l'angle de réfraction est plus grand que l'angle d'incidence, quand la lumière passe d'un milieu plus dense dans un milieu moins dense.

Le rapport du sinus de l'angle de réfraction au sinus de l'angle d'incidence est un rapport constant.

Ce rapport $\frac{\sin i}{\sin r}$ est donné dans la table suivante pour un grand nombre de substances.

SUBSTANCES.	VALEUR DE $= \frac{\sin i}{\sin r}$
Air atmosphérique	1.000294
Oxigène	1.000272
Hydrogène	1.000138
Azote	1.000300
Gaz des marais	1.000443
Baryte sulfatée	1.643
Verre d'antimoine	1.888
Chaux sulfatée	1.488
Verre commun	1.550
Cristal de roche	1.562
Spath d'Islande	1.666
Sel gemme	1.545
Alun	1.458

Digitized by Google

Eau de pluie	1.336
Gomme arabique	1.476
Esprit-de-vin rectifié	1.370
Camphre	1.300
Huile d'olive	1.466
Huile de lin	1.481
Essence de térébenthine	1.471
Ambre	1.555
Diamant	2.439

DES VERRES SPHÉRIQUES.

Soit d la distance donnée d'un objet, r le rayon de sphéricité, f le foyer, p à q le rapport des sinus d'incidence et de réfraction, on a

pour les objets placés du côté de la convexité

$$f = \frac{d\,p\,r}{d\,(p-q) - r\,q},$$

et pour les objets placés du côté de la concavité

$$f = \frac{-d\,p\,r}{d\,(q-p) + r\,q}.$$

Dans le passage de l'air dans le verre, on a approximativement $p = 31$, $q = 20$. Ces formules deviennent

pour les surfaces convexes du côté de l'air

$$f = \frac{31\,d\,r}{11\,d - 20\,r},$$

et pour les surfaces concaves du côté de l'air

$$f = \frac{-31\,d\,r}{11\,d + 20\,r}.$$

Digitized by Google

GRANDEUR DES IMAGES.

I étant l'image, O l'objet, p et q les réfractions des deux milieux, on a
pour les verres convexes du côté de l'air

$$\frac{I}{O} = \frac{q\,r}{(p-q)\,d - q\,r};$$

pour les verres concaves du côté de l'air

$$\frac{I}{O} = \frac{q\,r}{(p-q)\,d + q\,r}.$$

Dans le cas où l'objet est placé au-dedans du verre, le verre étant convexe à l'objet,

$$\frac{I}{O} = \frac{p\,r}{(p-q)\,d + p\,r},$$

le verre étant concave à l'objet,

$$\frac{I}{O} = \frac{p\,r}{(p-q)\,d - q\,r}.$$

DES LENTILLES.

Soit d la distance d'un objet à la lentille, r le rayon de sphéricité des segmens, f la distance du foyer à la surface, on a, en négligeant l'épaisseur du verre, pour les lentilles biconvexes,

$$f = \frac{\frac{1}{2}\,q\,d\,r}{(p-q)\,d - \frac{1}{2}q\,r} = \frac{10\,d\,r}{11\,d - 10\,r};$$

pour les lentilles plan convexes,

$$f = \frac{q\,d\,r}{(p-q)\,d - q\,r} = \frac{20\,d\,r}{11\,d - 20\,r};$$

Digitized by Google

pour les lentilles biconcaves,

$$f = -\frac{\frac{1}{2} q\, dr}{(p-q)\, d + \frac{1}{2} q\, r} = \frac{10\, dr}{11\, d + 10\, r};$$

pour les lentilles plan concaves,

$$f = -\frac{q\, dr}{(p-q)\, d + qr} = \frac{20\, dr}{11\, d + 20\, r}$$

Si la lentille est concave d'un côté et convexe de l'autre, R r étant des rayons différens de sphéricité,

$$f = \frac{q\, dr\, R}{(p-q)\, dR - (p-q)\, dr - qr\, R}$$

$$= \frac{20\, dr\, R}{11\, dr\, R - 11\, dr - 20\, r\, R}.$$

GRANDEUR DES IMAGES DANS LES LENTILLES.

I étant toujours l'image, O l'objet, on a dans les lentilles biconvexes,

$$\frac{I}{O} = \frac{\frac{1}{2} qr}{(p-q)\, d - \frac{1}{2} qr} = \frac{10\, r}{11\, d - 10\, r},$$

dans les lentilles plan convexes,

$$\frac{I}{O} = \frac{qr}{(p-q)\, d - qr} = \frac{20\, r}{11\, d - 20\, r},$$

dans les lentilles biconcaves,

$$\frac{I}{O} = \frac{\frac{1}{2} qr}{(p-q)\, d + \frac{1}{2} qr} = \frac{10\, r}{11\, dr + 10\, r}.$$

Digitized by Google

dans les lentilles plan concaves,

$$\frac{I}{O} = \frac{\frac{1}{3} q r}{(p-q)d + \frac{1}{3} q r} = \frac{20\,r}{11\,d + 20\,r}.$$

Problème.

Dans un globe sphérique de verre mince, de 8 pouces de diamètre, entièrement plein d'eau, se trouve un petit objet situé sur l'axe, à égale distance, entre la surface et le centre du globe. On demande de déterminer le lieu et la grandeur relative de l'image de cet objet dans l'intérieur du globe, en supposant le rapport entre le sinus d'incidence et de réfraction dans le passage de l'eau dans l'air, comme 3 à 4.

On a ici $d = 2 \quad r = 4 \quad p = 3 \quad q = 4.$

$$f = \frac{-dpr}{d(q-p) + rq} \text{ devient}$$

$$f = \frac{-2 \times 3 \times 4}{2(4-3) + 4 \times 4} = \frac{24}{18} = 1^{\text{pouce}}.4^{\text{lig.}}.$$

L'image se trouve donc à 1 pouce et 4 lignes de distance de la surface du globe; on trouverait $\frac{8}{9}$ pour la grandeur de l'objet, au moyen de

$$\frac{I}{O} = \frac{qr}{(p-q)d - qr} = \frac{4 \times 4}{(3-4)2 - 4 \times 4}$$

$$= -\frac{16}{18} = \frac{8}{9}.$$

Problème.

A quelle distance faudrait-il placer l'objet dans l'intérieur de ce globe d'eau, pour que son foyer ou

Digitized by Google

image fût au centre de la sphère, et quel serait dans ce cas le rapport de sa grandeur linéaire à celle de l'objet ?

L'objet devra se trouver à l'extrémité d'un des diamètres du globe, et alors son image sera les $\frac{1}{7}$ de l'objet.

Problème.

Près de l'axe d'une lentille de verre biconvexe et symétrique, d'un rayon de courbure égal à 22 pouces et à 4 pouces de distance de sa surface, se trouve un petit objet concentrique à la convexité du verre. On demande à quelle distance, derrière la lentille, l'image de cet objet sera aperçue par un œil situé du côté opposé ?

$$f = \frac{10\,dr}{11\,d - 10\,r} = \frac{10 \times 4 \times 22}{11 \times 4 - 10 \times 22}$$

$$= \frac{880}{44 - 220} = -\frac{880}{176} = 5 \text{ pouces.}$$

La distance de l'image au verre sera donc égale à 5 pouces.

Problème.

Quel sera le degré d'amplification, les conditions restant les mêmes ?

$$l = \frac{10\,r}{11\,d - 10\,r} \text{ devient } \frac{10 \times 22}{11 \times 4 - 10 \times 22}$$

$$= \frac{220}{44 - 220} = 1\,\tfrac{1}{4},$$

c'est-à-dire que l'image aura une fois et un quart chaque dimension de l'objet.

Problème.

Soit proposée une lentille semblable à la précédente, mais de 66 pouces de rayon, et un petit

Digitized by Google

objet placé à 600 pouces de sa surface, toujours sur le prolongement de l'axe. On demande à déterminer la distance de l'image de cet objet à la lentille, et le rapport de ses dimensions à celle de l'image.

Réponse. L'image se formera du côté opposé à l'objet, à 66 pouces $\frac{2}{3}$ de distance du verre; elle sera $\frac{1}{9}$ de l'objet.

Problème.

A quelle distance de la même lentille faudrait-il placer l'objet pour que son image parût du côté opposé trois fois plus grande que l'objet, et à quel intervalle du verre se formerait l'image?

Il est clair qu'il faut dans

$$I = \frac{11\,d - 10\,r}{10\,r}$$

faire $I = 3$ et chercher d.

On tire de cette formule

$$11\,d = \frac{10\,r}{I} + 10\,r = \frac{660}{3} + 660 = 880$$

$$\text{d'où } d = \frac{880}{11} = 80 \text{ pouces}$$

pour la distance demandée de l'objet à la lentille.

Pour répondre à la seconde question, il faut introduire dans

$$f = \frac{10\,dr}{11\,d - 10\,r}$$

la valeur de d que nous venons de trouver;

f devient alors $= \frac{10 \times 80 \times 66}{880 - 660} = \frac{52800}{220} = 240$;

l'image se peindrait donc à 240 pouces d'éloignement.

Digitized by Google

Problème.

Quel devrait être le rayon de courbure d'une lentille semblable aux précédentes, pour qu'un petit objet situé à 50 pouces de sa surface, parût amplifié au quadruple à un observateur placé du côté opposé.

Ici c'est r qu'il faut déterminer dans

$$I = \frac{10r}{11d - 10r}.$$

Or on tire

$$r = \frac{11dI}{10 + 10I};$$

et puisqu'on demande que I soit 4, on a

$$r = \frac{11 \times 50 \times 4}{50} = \frac{2200}{50} = 44 \text{ pouces.}$$

Le rayon de sphéricité devrait donc être égal à 44 pouces.

Problème.

On demande quelle était la courbure d'une lentille biconvexe, sachant que les rayons solaires reçus sur sa surface près de l'axe, ont formé leur foyer à 2 pouces $\frac{8}{11}$ d'éloignement de la face opposée.

$$f = \frac{10dr}{11d - 10r} \text{ devient } r = \frac{11df}{10d + 10f};$$

mais ici d est infini, puisque l'objet est le soleil; il est permis alors de négliger les termes qui ne contiennent point l'infini, et cette relation devient

$$r = \frac{11f}{10} = \frac{11 \times \frac{30}{11}}{10} = \frac{30}{10} = 3 \text{ pouces.}$$

Digitized by Google

c'est-à-dire que cette lentille devait avoir un rayon de courbure de 3 pouces.

Problème.

Étant proposé un verre plan convexe de 33 pouces de rayon et un objet situé à 26 pouces de distance sur le prolongement de l'axe, on demande à quelle distance, derrière la lentille, un observateur devra voir l'image de l'objet, et sous quelle amplification?

Ici $d = 26$ $r = 33$, partant

$$f = \frac{20\,dr}{11\,d - 20\,r} \text{ devient } = \frac{20 \times 26 \times 33}{11 \times 26 - 20 \times 33}$$

$$= \frac{17160}{286 - 660} = -\frac{17160}{374} = 45.88 \text{ pouces à peu près.}$$

$$I = \frac{20\,r}{11\,d - 20\,r}$$

donne pour l'amplification

$$\frac{20 \times 33}{11 \times 26 - 20 \times 33} = \frac{660}{286 - 660} = \frac{660}{374}$$

$= 1.78$ à peu de chose près.

Problème.

Sur le prolongement de l'axe d'un verre biconcave symétrique d'un pied de rayon, et à 100 pouces de distance de sa surface, se trouve un petit objet lumineux. On demande à quelle distance, derrière la lentille, l'image de cet objet sera aperçue par un spectateur situé du côté opposé

Digitized by Google

$$f = -\frac{10\,dr}{11\,dr + 10\,r} = \frac{10 \times 100 \times 12}{1100 + 120}$$

$$= \frac{12000}{1220} = 9.84 \text{ pouces};$$

c'est la distance cherchée.

Pour obtenir la grandeur relative, on se servira de

$$I = \frac{10\,r}{11\,d + 10\,r} = \frac{120}{1200} = \frac{6}{61},$$

c'est-à-dire que l'image serait à peu près le dixième de l'objet.

Problème.

Quel devrait être le rayon de courbure d'une lentille semblable pour que l'image d'un objet placé à la même distance que dans le problème précédent, parût à l'œil opposé dix fois plus petite que l'objet, et quel serait dans ce cas l'intervalle entre cette image et le verre?

De $I = \frac{10\,r}{11\,d + 10\,r}$ il faut tirer la valeur de r qui est $r = \frac{11\,dI}{10 - 10\,I}$, et mettre pour I sa valeur $\frac{1}{10}$ on a $r = \frac{110}{9} = 12.2$;

l'on trouverait à peu près 10 pour la distance focale.

Nous croyons avoir suffisamment montré comment tous ces calculs s'opèrent, pour ne point avoir à les développer dans les problèmes suivans. Ils se résolvent presque tous par des méthodes analogues: nous nous bornerons donc à en donner les solutions.

Digitized by Google

Problème.

Étant proposé un verre plan concave de 11 pouces de rayon, et un objet placé à 10 pouces de distance sur le prolongement de l'axe, on demande la distance focale et la grandeur apparente de l'objet?

Réponse. L'éloignement de l'image sera égal à 6.66 pouces; la grandeur apparente est les $\frac{2}{3}$ de l'objet.

Problème.

Deux lentilles symétriquement biconvexes, l'une de 2 pouces de rayon, l'autre de 3 pouces, ayant été placées à 6 pouces d'intervalle l'une de l'autre, de manière que leurs axes se confondent, on demande à quelles distances de leurs surfaces externes sur les axes prolongés, il faudra placer deux petits objets pour que leurs images se confondent en une seule, en se formant dans le milieu de l'intervalle qui les sépare.

Réponse. Les distances cherchées de ces objets devront être de 30 pouces du côté de la lentille, moins convexe, et $4\frac{6}{11}$ pour l'autre.

Problème.

Étant donnée une lentille du même genre que les précédentes avec un petit objet situé sur l'axe, à 5 pouces de sa surface, de manière à projeter du côté opposé une image qui était sensiblement les $\frac{2}{3}$ de l'objet; on voudrait placer vis-à-vis de cette lentille un verre symétriquement biconcave, tellement qu'un autre petit objet, éloigné pareillement de 5 pouces de sa surface externe, formât son image sous les mêmes dimensions que l'autre, dans la moitié de l'intervalle qui sépare les lentilles.

On demande quelles devront être les courbures des deux verres, et à quelle distance il faudra les mettre l'un de l'autre?

Réponse. Le rayon de verre convexe devra être

Digitized by Google

d'un pouce, celui du verre concave $1\frac{1}{4}$, et leur écartement $2\frac{3}{9}$ de pouces.

Problème.

Dans quel rapport seront les distances focales des rayons solaires qui traversent deux lentilles biconvexes et symétriques de mêmes courbures et diamètres, l'une de verre et l'autre d'eau (c'est-à-dire formés de deux calottes minces de verre, dont l'intervalle est rempli de ce liquide)?

On suppose le rapport des sinus d'incidence et de réfraction $\frac{1}{2}$ pour le verre, et $\frac{1}{3}$ pour le passage dans l'eau.

Réponse. Le rapport demandé sera sensiblement comme 2 à 3.

Problème.

Quels seraient, pour les mêmes lentilles, les rapports des foyers et des dimensions des images d'un petit objet placé sur l'axe prolongé, à une distance de chaque verre égale à 6 fois le rayon de la courbure?

Réponse. La distance de l'image à la lentille de verre sera à la distance analogue de la lentille d'eau, comme $\frac{6}{5}$ est à 2, ou comme 3 à 5; et les grandeurs des images seront respectivement comme $\frac{1}{5}$ à $\frac{1}{7}$ ou comme 3 à 5, c'est-à-dire que les foyers seront entre eux comme les dimensions des images.

Problème.

Quel devrait être, dans le même exemple, le rayon de courbure de la lentille d'eau, pour qu'elle diminuât l'image de l'objet dans le même rapport que la lentille de verre?

Réponse. Le rayon cherché devrait être égal aux deux tiers de celui de la lentille de verre.

Problème.

En supposant que dans les deux lentilles précé-

Digitized by Google

dentes, les rayons de courbure soient, de part et d'autre, d'un pied, et la distance focale de l'image au corps réfringent, neuf pouces, on demande à quelles distances il faudra placer l'objet de part et d'autre pour que son image soit amplifiée dans le même rapport par les deux lentilles, et quel sera ce rapport?

Réponse. En plaçant l'objet à neuf pouces de la lentille d'eau, ou au quadruple de cette distance de la lentille de verre, l'image paraîtra de part et d'autre à peu près double de l'objet.

Problème.

Etant donné un globe de verre sphérique et massif, et un petit objet placé sur le prolongement de l'axe à une distance égale au double du diamètre du globe, on demande, 1°. à quelle distance du côté opposé se formera l'image de cet objet; 2°. quelle sera sa grandeur relative: on suppose le rapport de réfraction comme 3 à 2; on obtient le foyer des sphères par la formule:

$$f = \frac{r(2q - p)}{2(p - q)}$$

Réponse. La distance de l'image sera égale aux $\frac{5}{7}$ du rayon du globe, et l'image sera les $\frac{2}{7}$ de l'objet.

Problème.

Etant proposée une lentille biconvexe et symétrique, d'une qualité de verre particulière, on demande quel devrait être son *pouvoir réfringent*, c'est-à-dire le rapport entre les sinus d'incidence et de réfraction, pour que le foyer des rayons parallèles proche de l'axe s'étendît du côté opposé à une distance égale au double du rayon de courbure?

Réponse. Le rapport cherché devra être comme 5 à 4.

Nous empruntons à Ozanam les problèmes suivans.

Digitized by Google

Problème.

Faire qu'un objet, vu de loin ou de près, paraisse toujours de la même grandeur.

Soit l'objet A B (*fig.* 22) qu'il est question de voir de différentes distances, et toujours sous le même angle, sur AB comme corde, décrivez un arc de cercle quelconque ; de tous les points de cet arc C. D., vous verrez l'objet A B sous le même angle ; car tout le monde sait que les angles ayant A B pour base, et leur sommet dans le segment A C D B, sont égaux.

Problème.

Deux parties inégales d'une même ligne droite étant données, qu'elles soient adjacentes ou non, trouver le point d'où elles paraîtront égales.

Sur AB et BC (*fig.* 23) formez du même côté les deux triangles isocèles semblables A F B, B G C, puis du sommet F, avec le rayon F B, décrivez un cercle, et du point G, avec le rayon G B, décrivez-en un autre qui coupera le premier en D ; ce point D sera le point cherché, car A D B = B D C.

Il y a une infinité de points, comme D, qui satisfont au problème, et on démontre que tous ces points sont dans la circonférence d'un demi-cercle tracé du centre I. Ce centre se trouve en menant par les sommets F G des triangles semblables A B F, B G C, la ligne G F jusqu'à sa rencontre en I avec A C prolongée, si les lignes AB, BC, faisaient un angle entre elles, la solution du problème serait toujours la même ; les deux arcs de cercle semblables, décrits sur A B, B C, se couperont nécessairement en quelque point D (à moins qu'ils ne se touchent en B), et ce point D donnera également la solution du problème.

La solution du problème sera encore la même si les lignes inégales AB, *bc* proposées (*fig.* 24), ne sont pas contiguës ; il y aura seulement cette attention à avoir, que les rayons F B, G *b* des deux cercles soient tels, que ces cercles puissent au moins se toucher l'un

Digitized by Google

l'autre. Si l'on fait $AB = a$, $Bb = c$, $bC = b$, il faudra pour que les cercles se touchent, que FB soit au moins

$$FB = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{ac^2 + a^2c + abc}}{b}$$

et

$$Gb = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{bc^2 + b^2c + abc}}{a}.$$

Si ces lignes sont moindres, les deux cercles ne se toucheront et ne se couperont point; si elles sont plus grandes, les cercles se couperont en deux points, qui donneront chacun une solution du problème; que a soit, par exemple, $= 3$, $b = 2$, $c = 1$, on trouvera $FB = \frac{1}{3}$ et $Gb = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{14}{3}}$.

Problème.

Au-devant d'un édifice dont CD (*fig.* 26) est la face, est un parterre dont la longueur est AB; on demande le point de cet édifice d'où l'on verra le parterre AB le plus grand possible.

Soit faite la hauteur CE moyenne proportionnelle entre CB et CA, ce sera la hauteur cherchée; car si l'on décrit par les points A. B. E un cercle, il sera tangent à la ligne CE par la propriété si connue des tangentes et des sécantes. Or, il est aisé de voir que l'angle AEB est plus grand qu'aucun autre AeB, dont le sommet est dans la ligne CD; car l'angle AeB est moindre que AgB, qui est égal à AEB.

Problème.

Un cercle étant donné sur ce plan horizontal, trouver la position de l'œil d'où son image, sur le plan perspectif, sera encore un cercle.

Digitized by Google

Nous supposons que le lecteur connaît le principe fondamental de toute représentation perspective, qui consiste à imaginer entre l'œil et l'objet un plan vertical que l'on nomme *perspectif*. On conçoit de chaque point de l'objet des rayons allant à l'œil. Si ces rayons laissaient une trace sur le plan vertical ou perspectif, il est évident qu'elle produirait la même sensation sur cet œil que l'objet même, puisqu'ils peindraient la même image sur la rétine.

Soit donc AC le diamètre du cercle (*fig.* 26) dans le plan horizontal, ACP la perpendiculaire au plan perspectif, QR la section de ce plan, par un plan vertical élevé sur AP, et PO la perpendiculaire à l'horizon et à la ligne AP, sur laquelle il s'agit de trouver le point O que l'œil doit occuper pour que la représentation *ac* du cercle AC soit aussi un cercle.

Faites PO moyenne proportionnelle entre AP et CP, le point O sera le point cherché; car si

$$AP : PO :: PO : CP$$

les triangles PAO, COP seront semblables, et les angles PAO, COP seront égaux: donc, les angles PAO et C*c*Q ou PAO et R*c*O seront aussi égaux: d'où il suit que dans le petit triangle *ac*O, l'angle en *c* sera égal à l'angle OAC′, et l'angle en O étant commun aux triangles AOC, *a*O*c*, les deux autres ACO, *c a*O seront égaux: donc

$$AO : CO :: cO : aO$$

le cône oblique AC′O est coupé sous contrairement par le plan vertical QR, et la nouvelle section est un cercle, comme on le démontre dans les sections coniques.

Problème.

Expliquer la cause des différences trouvées par deux observations dans la valeur d'un angle pris dans les mêmes circonstances et avec le même instrument.

Digitized by Google

M. Amici prétend qu'en supposant les divisions d'un instrument mathématiquement exactes, il est impossible qu'avec des verniers et de petits microscopes simples, on puisse discerner trois secondes sur le limbe d'un instrument; pour le prouver, dit-il, je trace ici, avec de l'encre, sur une feuille de papier blanc, deux gros traits en ligne droite, chacun de l'épaisseur de $\frac{1}{12}$ de pouce ou une ligne placée comme la figure 27. Ces deux traits peuvent être considérés comme appartenant, l'un au limbe, et l'autre au vernier de l'instrument. J'expose ce papier dans un lieu bien éclairé, et je m'en éloigne, perpendiculairement à son plan, à la distance de 28 pieds; je regarde ces traits d'un œil: je les vois unis comme si ce n'était qu'un seul trait continu et uniforme partout: je juge alors qu'*il y a coïncidence* des lignes, quoique, dans le fait, chaque point de l'une soit éloigné du point correspondant de l'autre, de toute la largeur du trait ou d'une ligne. Voilà donc la limite de ma vision; cette limite exprimée par l'angle sous-tendu de l'objet dans l'œil de l'observateur, répond à 51″.

Partant, dans un cercle de neuf pieds de circonférence, l'arc d'une seconde occupe 0,001 d'une ligne, et si nous calculons l'angle que ce petit arc sous-tend dans l'œil armé d'un microscope d'un pouce de foyer, on le trouvéra de 17″; par conséquent invisible pour moi, si même il était triple, c'est-à-dire 51″. Ainsi, sur un cercle de trois pieds dans lequel on fait usage des verniers et des microscopes de la force indiquée, il me serait impossible de voir un angle de 3″. Cet angle étant insensible, on ne doit plus s'étonner des valeurs différentes données par le même instrument.

Digitized by Google

ANAMORPHOSES.

On appelle *anamorphose* en perspective et en peinture, une projection monstrueuse, ou une représentation défigurée de quelque image, qui est faite sur un plan ou sur une surface courbe, et qui néanmoins, à un certain point de vue, paraît régulière et faite avec de justes proportions.

Problème.

Faire une anamorphose, ou une projection monstrueuse sur un plan.

Tracez le carré ABCD (*fig.* 28), d'une grandeur à volonté, et subdivisez-le en aréoles ou en petits carrés. Dans ce carré ou cette espèce de réseau que l'on appelle *prototype craticulaire*, tracez au naturel l'image dont l'apparence doit être monstrueuse; tirez ensuite la ligne *a b* (*fig.* 29), égale à AB, et divisez-la dans le même nombre de parties égales que le côté du prototype AB; au point du milieu E, élevez la perpendiculaire EV, et menez VS perpendiculaire à EV, en faisant la ligne EV d'autant plus longue, et la ligne VS d'autant plus courte, que vous avez dessein d'avoir une image plus difforme. De chaque point de division, tirez au point V des lignes droites, et joignez les points *b*, S, par la ligne droite *b*, S. Par les points *c*, *e*, *f*, *g*, etc., tirez des lignes droites parallèles à *a b*; alors *a b c d* sera l'espace où l'on doit tracer la projection monstrueuse; et c'est ce que l'on appelle l'*ectype craticulaire*.

Enfin, dans chaque aréole ou petit trapèze de l'espace *a b c d*, dessinez ce que vous voyez tracé dans l'aréole correspondante du carré ABCD; par ce moyen vous aurez une image difforme, qui paraîtra néanmoins dans ses justes proportions si l'œil est placé de manière qu'il en soit éloigné de

Digitized by Google

la longueur E V, et élevé au-dessus, à la hauteur de V S.

Le spectacle sera beaucoup plus agréable, si l'image défigurée ne représente pas un pur chaos, mais quelque autre apparence : ainsi, l'on a vu une rivière avec des soldats, des chariots, etc., marchant sur l'une de ses rives, représentée avec un tel artifice, que, quand elle était regardée au point S, il semblait que ce fût le visage d'un satyre : mais on ne peut donner facilement des règles pour cette partie, qui dépend principalement de l'industrie et de l'adresse de l'artiste.

On peut aussi faire mécaniquement une anamorphose de la manière suivante : on percera de part en part le prototype à coups d'aiguille, dans son contour et dans plusieurs autres points; ensuite on l'exposera à la lumière d'une bougie ou d'une lampe, et on marquera bien exactement les endroits où tombent sur un plan, ou sur une surface courbe, les rayons qui passent à travers ces petits trous; car ils donneront les points correspondans de l'image difforme, par le moyen desquels on peut achever la déformation.

Problème.

Faire une anamorphose sur la surface convexe d'un cône.

Il paraît assez, par le problème précédent, qu'il ne s'agit que de faire un ectype craticulaire sur la surface d'un cône qui paraisse égal au prototype craticulaire, l'œil étant placé à une distance convenable, au-dessus du sommet du cône.

C'est pourquoi, soit la base du cône divisée par des diamètres en un nombre quelconque de parties égales; ou, ce qui revient au même, soit visée la circonférence de cette base, en tel nombre qu'on voudra de parties égales, et soient tirées par les points de division des lignes droites au centre. Soit aussi divisé un rayon en quelques parties égales; par chaque point de division, décrivez

Digitized by Google

des cercles concentriques; par ce moyen vous aurez tracé le prototype craticulaire. Avec le double du diamètre, comme rayon, décrivez le quart de cercle E G (*fig.* 30), afin que l'arc E G soit égal à la circonférence entière, et pliez ce quart de cercle de manière qu'il forme la surface d'un cône, dont la base soit le cercle A B C D; divisez l'arc E G dans le même nombre de parties égales que le prototype craticulaire est divisé, et tirez des rayons de chacun des points de division; prolongez G F en I, jusqu'à ce que F I = F G; du centre I, et du rayon I F, décrivez le quart du cercle F K H, et du point I au point D, tirez la droite I E; divisez l'arc K F dans le même nombre de parties égales que le rayon du prototype craticulaire; et du centre I, par chaque point de division, tirez des rayons qui rencontrent E F aux points 1, 2, 3, etc.; enfin du centre F, et des rayons F 1, F 2, F 3, décrivez des arcs concentriques : de cette manière vous aurez l'ectype craticulaire, dont les aréoles paraîtront égales entre elles.

Ainsi, en transportant dans les aréoles de l'ectype craticulaire, ce qui est dessiné dans chaque aréole du prototype craticulaire, vous aurez une image monstrueuse, qui paraîtra néanmoins dans ses justes proportions, si l'œil est élevé au-dessus du sommet du cône, d'une quantité égale à la distance de ce sommet à la base.

Si l'on tire, dans le prototype craticulaire, les cordes des quarts de cercle, et dans l'ectype craticulaire, les cordes de chacun de ses quarts, toutes choses d'ailleurs restant les mêmes, on aura l'ectype craticulaire dans une pyramide quadrangulaire.

Il sera donc aisé de dessiner une image monstrueuse sur toute pyramide, dont la base est un polygone régulier quelconque.

Comme l'illusion est plus parfaite quand on ne peut pas juger, par les objets contigus, de la distance des parties de l'image monstrueuse, il est mieux de ne regarder ces sortes d'images que par un petit trou.

Digitized by Google

On voyait à Paris, dans le cloître des Minimes de la Place Royale, deux anamorphoses tracées sur deux des côtés du cloître ; l'une représente la Magdelaine, l'autre saint Jean écrivant son Evangile. Elles sont telles que, quand on les regarde directement, on ne voit qu'une espèce de paysage, et quand on les regarde d'un certain point de vue, elles représentent des figures humaines très distinctes. Ces deux figures sont l'ouvrage du P. Niceron, Minime, qui a fait sur ce même sujet un traité latin, intitulé *Thaumaturgus opticus*, Optique miraculeuse, dans lequel il traite de plusieurs phénomènes curieux d'optique, et donne fort au long les méthodes de tracer ces sortes d'anamorphoses sur des surfaces quelconques.

DU CALENDRIER.

La distribution du temps, d'après certaines périodes déterminées, est un résultat des progrès des observations astronomiques. Il est indubitable que les premiers peuples commencèrent d'abord à compter par jours ; dans la suite, l'examen des phénomènes célestes ayant fait découvrir certaines périodes régulières dans le mouvement des astres, on dut évaluer le temps d'après leur succession, et arriver ainsi, à mesure que les notions devenaient plus étendues, à des combinaisons plus compliquées. Lorsqu'on étudie les méthodes adoptées par les divers peuples pour diviser et calculer le temps, on voit qu'elles sont toutes fondées sur les mouvemens des corps célestes les plus apparens, tels que le soleil et la lune. Enfin, il en est plusieurs que l'on a considérées comme ne se rattachant à aucun phénomène naturel, et comme entièrement arbitraires ; mais il est plus probable d'admettre que les bases sur lesquelles elles réposent ne nous sont point parvenues, que de penser qu'elles

Digitized by Google

ont été le produit d'une conception purement imaginaire.

Le tableau sur lequel est indiquée la division du *temps*, par jours, semaines, mois, saisons et années, a reçu le nom de *calendrier*, dérivé des *calendes romaines*; la forme et la distribution en sont extrêmement variables; la comparaison de chacun de ceux employés par les différens peuples est un des travaux les plus importans pour obtenir des résultats positifs sur la chronologie : nous nous bornerons à indiquer les principaux.

D'après les citations de plusieurs auteurs tels que Géminus et Censorinus, qui ont beaucoup écrit sur cette matière, l'année civile des Egyptiens et des Perses était composée de 365 jours; en sorte que, tous les quatre ans, elle retardait d'un jour sur l'année solaire, et ce n'était qu'après un intervalle de 1460 ans, qu'ils appelaient *periode sothiaque* ou *grande année caniculaire*, que les années civiles et solaires se retrouvaient d'accord. Les mois, au nombre de 12 chaque année, étaient de 30 jours chacun; et pour compléter l'année, ils ajoutaient 5 jours *épagômènes* ou complémentaires. Les Cophtes font encore usage aujourd'hui de ce calendrier, qui servit de modèle à celui de la république française, qui divisait, comme on sait, le mois en 3 *décades* ou semaines de 10 jours.

Le calendrier des Grecs fut peut-être celui qui présenta les variations les plus nombreuses : chez eux l'année, d'abord de 360 jours, se divisait en 12 mois de 30 jours chacun; après deux ans, période que l'on appelait *triétéride*, on intercalait un mois de 30 jours, en sorte que l'on avait alternativement une année de 360 jours et une autre de 390. Cette manière de diviser le temps, suivie jusque 600 ans environ avant notre ère, présentait un grand nombre d'inconvéniens, qui devenaient plus sensibles à mesure que les études astronomiques s'introduisaient dans le pays. On consulta les oracles, qui décidèrent que l'on devait régler l'année sur la marche du so-

Digitized by Google

leil, et les mois et les jours sur celle de la lune. Les observations ayant appris que ce dernier astre accomplissait ses diverses phases en 29 jours ½, on divisa en deux parties inégales cette période de temps double, et on obtint 2 mois, l'un de 30 jours, et l'autre de 29, qui commençaient par la *néoménie* ou *nouvelle lune*. Cependant les 12 lunaisons ne formant que 354 jours, l'année se trouvait en retard de 11 jours ¼ avec celle indiquée par le cours du soleil. Après 8 ans, l'excédant de l'année solaire produisait juste 90 jours, dont on forma 3 mois intercalaires de 30 jours, que l'on plaça aux troisième, cinquième et huitième années de cette période dite *octaétéride*. Il y avait aussi 3 années de 13 mois, ou de 384 jours, tandis que les autres n'en avaient que 354. Dans cette manière de calculer le temps, les conditions de l'oracle n'avaient pas été remplies. On se trouvait bien d'accord avec le cours du soleil pour la composition de l'année; mais il n'en était pas de même pour celle des mois, qui devaient se trouver en rapport avec les retours de la lune aux mêmes points du ciel. En effet, après une *octaétéride*, il s'en fallait d'un jour et demi que cet astre eût achevé sa dernière révolution. Après deux octaétérides, ou une période de 16 ans, on prit la résolution d'ajouter 3 jours complémentaires ou épagomènes, et on pensa avoir ainsi satisfait aux décrets des dieux. Toutefois les Athéniens, auxquels était dure cette réforme, sentirent bientôt qu'en voulant rendre les mois et les jours d'accord avec la marche de la lune, les années ne se trouvaient plus en rapport avec le cours du soleil.

Meton, célèbre astronome athénien, entreprit de remédier à ces inconvénients. Il imagina une période ou un *cycle* de 19 ans, après lesquels les rapports des jours, des mois et des années avec les retours de la lune et du soleil aux mêmes points du ciel se trouvaient conservés. Dans cette période de 19 ans on comptait 235 lunaisons, savoir : 228 à raison de 12 lunaisons par an, et 7 autres à cause des 11 jours

Digitized by Google

dont chaque année solaire surpasse l'année lunaire. Les 7 mois lunaires, dont 6 étaient de 30 jours chacun, et le septième de 29, se nommaient intercalaires ou *embolismiques*. Cette découverte parut si belle aux Grecs, qu'elle fut admise par presque tous les peuples de ces contrées. On en exposa le calcul en lettres d'or dans les places publiques pour l'usage de tous les citoyens : c'est de là que lui vient le nom de *nombre d'or*. Une erreur légère s'était glissée dans le calcul de Meton sur la durée de la lunaison : il arriva qu'après 76 ans, on se trouva en avance d'un jour sur l'époque du retour de la nouvelle lune. Calippe, astronome célèbre de l'époque, établit pour y remédier une période de 4 cycles de Meton, formant 27,960 jours, qu'il réduisit à 27,959, en en retranchant un au dernier cycle.

Le calendrier arabe, suivi par tous les peuples qui professent la religion mahométane, est entièrement fondé sur le cours de la lune; et les mois sont tellement distribués, que leur premier jour doit correspondre toujours à une nouvelle lune ou néoménie. Ces années de 354 et de 355 jours sont très vagues en ce qu'elles parcourent successivement, en rétrogradant, toutes les saisons. Ces peuples ont une période de 30 ans dans laquelle on compte 19 années de 354 jours, et formées de 12 mois alternativement de 29 et de 30 jours, et 11 autres de 355. Les dernières sont les 2e, 5e, 7e, 10e, 13e, 16e, 18e, 21e, 24e, 26e et 29e.

Du reste, la manière de régler le temps adoptée par ces peuples se ressent de la barbarie dans laquelle ils sont plongés depuis si long-temps. En effet, la détermination du commencement de leurs mois est si variable, qu'il est souvent impossible de trouver exactement sur notre calendrier actuel le jour correspondant, et on n'en sera plus surpris lorsqu'on saura qu'il suffit de la présence d'un nuage au-devant de la lune pour que le commencement du mois soit retardé : ils ne se fient toujours qu'aux apparences.

Digitized by Google

Nous arrivons maintenant au calendrier Romain, d'où dérive celui dont nous faisons actuellement usage en Europe. Les connaissances que nous possédons sur la méthode des Romains dans la division du temps se réduisent à très peu de choses jusqu'à l'époque où Jules César opéra cette réforme si célèbre. On sait seulement que sous Romulus l'année se composait de 10 mois, dont mars était le premier. Numa en ajouta deux autres, dont l'un, nommé *février*, fut placé à la fin de l'année, et l'autre, qui était *janvier*, au commencement. Les communications avec les Grecs apportèrent quelques changemens sous les décemvirs, qui transportèrent le mois de février au second mois de l'année. Pendant le long espace de temps qui les sépare de Jules César, les pontifes, qui avaient le droit de régler le calendrier, opérèrent des changemens qui ont ajouté encore à l'obscurité profonde qui règne sur la chronologie de ces pays. Enfin parut Jules César, maître et souverain pontife de Rome : il résolut de fixer le calendrier Romain. Il fit venir à ce sujet un astronome égyptien, Sosigenès, de qui il apprit que l'année solaire était composée de 365 jours un quart; d'après cela il établit que désormais l'année se composerait de 365 jours, et qu'au bout de quatre ans on en ajouterait un sixième, afin de tenir lieu de 6 heures négligées pendant 4 ans: la dernière année fut nommée *bissextile*. Quelques mois changèrent de dénomination; mais ils étaient toujours au nombre de 12, de 30 et 31 jours chacun, excepté celui de *février*, qui en avait 28 ou 29, suivant que l'année était ordinaire ou bissextile. Le premier jour du mois chez les Romains se nommait *calendes;* le 5 venaient les *nones;* le 13, les *ides*. En mars, mai, juillet et octobre, les nones se trouvaient le 7, et les ides le 15. Ils avaient une manière de compter toute particulière : ils allaient en rétrogradant; ainsi, ils disaient la veille avant les ides, le 3e, le 4e, le 5e jour avant les ides. Le nouveau calendrier appelé *Julien*, du nom de son auteur, fut adopté dans toute l'éten-

Digitized by Google

due de l'empire romain, et par tous les chrétiens eux-mêmes, qui, afin de déterminer exactement *l'époque* de leurs Pâques, firent usage du cycle de *Meton*.

Cependant, la durée de l'année, fixée par Jules César à 365 jours un quart, était trop longue de 11 minutes et 9 secondes. Cette erreur, presque imperceptible pendant un court intervalle de temps, produisait environ 1 jour en 133 ans; en sorte que depuis la réforme de César jusqu'en 1582, époque à laquelle eut lieu la réforme du pape Grégoire XII, les équinoxes avaient remonté au commencement des mois où ils se trouvent; et celui du printemps se rencontrait le 11 mars, au lieu de se trouver au 21 de ce mois, où le concile de Nicée l'avait fixé en 325.

Grégoire, voulant remédier à ce dérangement, qui s'augmentait de plus en plus, d'après l'avis des plus illustres astronomes, et surtout de Clovius, publia une bulle dans laquelle il prescrivait de retrancher de l'année 1582 les 10 jours d'erreur qui avaient été causés par l'excès des 11 minutes de l'*année Julienne* sur l'année solaire, et prescrivit que l'on compterait le 15 octobre lorsqu'on serait arrivé au 5. Voulant en outre empêcher le retour de semblables erreurs, il arrêta que, dans l'espace de 400 ans, on retrancherait 3 bissextiles : par conséquent les années 1700 et 1800 n'ont pas été bissextiles; l'an 1900 ne le sera pas non plus, parce que 1600 l'a été; mais 2000 le sera. Tel est le *calendrier Grégorien*, qui fut suivi presque aussitôt la publication de la bulle, par tous les peuples de la chrétienté. Il n'y eut que les princes protestans qui refusèrent d'abord de l'introduire dans leurs états, mais plus tard, en ayant senti tous les avantages, ils ne s'y refusèrent plus. Il n'y a actuellement en Europe que les Russes et les chrétiens du rite grec qui aient conservé l'année julienne, qui maintenant commence 12 jours après la nôtre.

Outre la subdivision de l'année en mois, ceux-ci

Digitized by Google

en présentent une autre que l'on a appelée *semaine*, et qui se compose chez nous de 7 jours, qui sont les *lundi*, *mardi*, *mercredi*, *jeudi*, *vendredi*, *samedi* et *dimanche*, noms qui dérivent de ceux des planètes; ainsi le premier est le jour de la lune, le second celui de Mars, le troisième celui de Mercure, le quatrième celui de Jupiter, le cinquième celui de Vénus, le sixième celui de Saturne, et le dernier enfin, celui du soleil ou du Seigneur.

L'ordre des planètes dans les jours de la semaine venait de l'influence qu'on leur supposait sur les différentes heures du jour : le dimanche, au lever du soleil, la première heure était pour le soleil, ensuite venaient Vénus, Mercure et la lune, qui étaient supposés au-dessous de lui; puis Saturne, Jupiter et Mars qui étaient au-dessus. Il arrivait aussi que le lendemain commençait par la lune, et voilà pourquoi le lundi fait suite au jour consacré au soleil. Il n'y eut guère que les Grecs qui refusèrent longtemps de diviser leur mois en semaines de sept jours : elles étaient primitivement de 10 jours ou décades; mais plus tard ils abandonnèrent cette manière de voir.

Dans la plupart des *almanachs*, il est encore question du *cycle solaire*, de l'*épacte*, etc. Nous allons donner une idée abrégée de la signification de ces mots.

On donne le nom de *cycle solaire* à une période de 28 ans, après laquelle le dimanche et les autres jours reviennent dans le même ordre et au même quantième des mois tant que les années sont bissextiles de 4 en 4 ans. Il y a donc 28 calendriers différens, se succédant pour chaque année du cycle. Le cycle solaire, ainsi nommé parce qu'il était destiné à trouver le jour du soleil ou le dimanche, a été inventé parce que l'année civile ne contenant pas un nombre exact de semaines, puisqu'elle en renferme 52 et 1 jour, les années suivantes ne commencent pas par le même jour. Si toutes les années étaient semblables, le cycle n'aurait besoin d'être que de

Digitized by Google

sept ans; mais, comme il y a une année bissextile tous les quatre ans, le cycle solaire ne peut être accompli qu'il ne contienne sept années bissextiles, afin que le jour excédant de chacune de ces années étant retranché, on puisse venir à une semaine complète.

On appelle *lettres dominicales* les sept premières lettres de l'alphabet, que l'on place vis-à-vis les jours du mois, et qui marquent successivement, pendant le cours du cycle solaire, les dimanches de chaque année. De ces lettres la première, A, marque toujours le 1er janvier, B le 2, C le 3, ainsi de suite jusqu'au 7 indiqué par G, et le 8 recommence par A. Il résulte de là que, connaissant la lettre qui désigne le dimanche de cette année, elle sera la même pour tous les autres. On conçoit aisément que l'année suivante ne commençant plus par le même jour de la semaine, la lettre A qui est invariable, désignera ce jour, et par suite le dimanche changera également de lettre.

La durée de l'année lunaire n'étant que de 354 jours, tandis que l'année solaire en a 365, il y a à chaque année civile une différence de 11 jours, correspondant à la quantité de jours dont la nouvelle lune est passée. Après 4 ans la nouvelle n'a été devancée que de 3 jours, parce que trois fois onze font 33, qui composent une lunaison entière et 3 jours. C'est ce nombre de jours dont excède l'année solaire sur l'année lunaire que l'on a nommé *épacte*. Ce cycle des épactes expire avec le cycle lunaire de 19 ans, et recommence ensuite pendant le même temps.

Passons maintenant à la résolution des problèmes.

La connaissance du nom du jour de la semaine qui répond à une date quelconque, suffit pour en conclure le nom du lendemain, du surlendemain, de la veille, de l'avant-veille, et enfin, de proche en proche, le nom de tous les jours de l'année. On sait d'ailleurs que le nombre des jours qu'on est convenu de donner à chacun des mois de l'année est

Digitized by Google

Janvier	31	Juillet	31
Février	28 ou 29	Août	31
Mars	31	Septembre	30
Avril	30	Octobre	31
Mai	31	Novembre	30
Juin	30	Décembre	31

Les quatre mauvais vers suivans pourront peut-être aider à classer ce tableau dans la mémoire.

Trente jours à novembre,
Juin, avril et septembre,
De vingt-huit il y en a un,
Tous les autres ont trente et un.

Cela posé, appelant M le millésime d'une année, si on le partage en deux nombres, l'un m formé des deux chiffres à droite, l'autre s des deux chiffres à gauche, ou aura pour *le nom du premier mars*, que nous appelons R, 1 désignant lundi et la lettre dominicale A; 2 mardi..... 7 ou 0 dimanche, on a

$$R = \left[\frac{m + \frac{1}{4}m + 5s + \frac{1}{4}s + 3}{7}\right]$$

On négligera les fractions qui peuvent se trouver dans chacun des nombres $\frac{1}{4}m$ en $\frac{1}{4}s$ et R n'est ici que le reste de la division du numérateur par le dénominateur.

Cette formule est générale; mais de 1800 à 1900, elle se simplifie et devient

$$R = \left[\frac{m + \frac{1}{4}m - 1}{7}\right],$$

Problème.

On demande quel était en 1823 le nom de l'initial de mars.

Pour ce cas $m = 23$, et l'on a

Digitized by Google

$$R = \left[\frac{23 + 5 - 1}{7}\right] = \frac{27}{7} = 3 \text{ et un reste } 6.$$

Le nom du premier mars 1823 était donc un samedi, et lorsqu'on connaît la dénomination du premier jour d'un mois, on a celle des

1. 8. 15. 22. 29.

Car, puisque ces nombres diffèrent de 7, les dénominations sont les mêmes.

Problème.

On demande quel sera l'initial de mars 1848.

$$R = \left[\frac{48 + 12 - 1}{7}\right] = \frac{59}{7} = 8 \text{ et un reste } 3.$$

Donc le premier mars 1848 sera un mercredi.

La table suivante que nous empruntons à l'Uranographie de Francœur, résoudra le problème pour tous les siècles futurs et passés.

A	B	C	D
Mercredi.	Lundi.	Samedi.	Jeudi.
Jeudi.	Mardi.	Dimanche.	Vendredi.
Vendredi.	Mercredi.	Lundi.	Samedi.
Samedi.	Jeudi.	Mardi.	Dimanche.
Mardi.	Dimanche.	Vendredi.	
Mercredi.	Lundi.	Samedi.	
Jeudi.	Mardi.	Dimanche.	
Vendredi.	Mercredi.	Lundi.	

USAGE DE LA TABLE.

De 1800 à 1900 on compte, en partant de la colonne C, 1800 sur le premier nom (samedi), 1801 sur le deuxième (dimanche), ... 1804 sur le

Digitized by Google

premier de la colonne D (jeudi), et ainsi de suite. Lorsqu'on a épuisé la dernière colonne, on revient sur la première A, qui répond à 1820, et on continue jusqu'à ce qu'on arrive à l'année de laquelle on veut avoir l'initial de mars.

De 1900 à 2000 on opère de même; mais en partant de la colonne D (1900 jeudi), de 2000 à 2100 on partira de la colonne A; de 2100 à 2200 de la colonne B, et ainsi de suite en partant *seulement* des 4 premières colonnes A B C D.

Connaissant l'initial de mars, on obtiendra celui de chaque mois au moyen de la table suivante, dans laquelle 1 désigne l'initial de mars quel qu'il soit, 2 son lendemain, 3 le nom du 3 mars, etc.

Janvier	5	4	Juillet	4
Février	1	7	Août	7
Mars	1		Septembre	3
Avril	4		Octobre	5
Mai	6		Novembre	1
Juin	2		Décembre	3
			Janvier	6
			Février	2

Ces nombres sont pour janvier et février 4 et 7 les années sont bissextiles.

Problème.

Distinguer les années bissextiles de celles qui ne le sont pas.

Si les deux chiffres à droite du millésime sont divisibles par 4 et sans reste, l'année est bissextile.

Nous avons vu que le nombre d'or était ce nombre par lequel on indiquait le rang de l'année dans le cycle lunaire, qui est une révolution de 19 années solaires, à la fin desquelles les nouvelles et pleines lunes reviennent aux mêmes jours que 19 années auparavant, mais non pas aux mêmes heures.

Le nombre d'or N est donné par la relation,

Digitized by Google

$$N = \left[\frac{M+1}{19}\right] = \left[\frac{m+55+1}{19}\right]$$

Si le numérateur est multiple de 19 on prend N = 19, et non pas 0, c'est-à-dire que, dans ce cas, l'année proposée est la dix-neuvième du cycle lunaire.

pour l'intervalle de 1800 à 1900.

$$N = \left[\frac{m-4}{19}\right]$$

N désigne toujours le reste de la division des nombres compris entre parenthèses.

Problème.

Quel était le nombre d'or pour 1825?

$$N = \left[\frac{m-4}{19}\right] \text{ devient } = \left[\frac{25-4}{19}\right] = \frac{21}{19}.$$

qui donne pour reste 2.

2 est donc le nombre cherché.

Problème.

On demande le nombre d'or de l'année 1725.

$$N = \left[\frac{M+1}{19}\right] \text{ devient } = \frac{1725+1}{19} = \frac{1726}{19}$$

qui donne 90 pour quotient, et un reste 16, qui est le nombre d'or cherché.

Les quotients donnent le nombre de cycles lunaires écoulés depuis le commencement de celui où se trouve l'ère chrétienne; il s'est donc écoulé 90

Digitized by Google

cycles lunaires depuis le commencement de celui où Jésus-Christ est né, jusqu'à 1725, et cette année a été la seizième du quatre-vingt-onzième cycle lunaire, à compter depuis ce temps.

Nous avons dit que les nouvelles lunes ne reviennent pas, comme l'avait cru Meton, précisément à la même heure tous les 19 ans, la différence, qui est d'environ une heure et demie, dont le mouvement de la lune avance sur celui du soleil, forme un jour à peu près au bout de 304 ans: c'est pourquoi le nombre d'or n'indique plus exactement les nouvelles lunes. On a dès-lors imaginé les *épactes*, qui expriment pour chaque année l'âge qu'avait la lune à la fin de l'année précédente. Il y a plusieurs manières de déterminer l'épacte: nous donnerons celle qui dépend de la connaissance du nombre d'or que nous savons trouver; E étant l'épacte, on a

$$E = \left[\frac{11(N-1)}{30}\right] + 8 + \tfrac{1}{4}s + \tfrac{1}{7}s - s.$$

On néglige toujours les fractions, et l'on ne prend que le reste de la division des nombres entre grandes parenthèses.

Si E est négatif il faut ajouter 30. Si E = 0, l'épacte se désigne par *: on la prend 0 ou 30 à volonté; passé l'année 4199, il faut remplacer le terme $\frac{1}{7}s$ par $\frac{1}{7}(s-f)$, f étant le quotient entier de

$$\frac{S-17}{25}$$

Pour l'intervalle de 1800 à 1900, la formule des épactes devient

$$E = \left[\frac{11(N-1)}{30}\right]$$

Digitized by Google

Problème.

On demande l'épacte de l'année 3081, qui a 4 pour nombre d'or.

ici $s = 30$

$$E = \left[\frac{11(N-1)}{30}\right] + 8 + \tfrac{1}{4}s + \tfrac{1}{3}s - s$$

devient $$\left[\frac{11\times 29}{30}\right] + 8 + 7 + 10 - 30$$

$$= 3 + 8 + 7 + 10 - 30 = -2$$

puisque ce résultat est négatif, il faut ajouter 30, et l'on a $30 - 2 = 28$ pour l'épacte demandée.

Au moyen de la dernière formule on construirait la table suivante, qui doit changer avec les siècles.

Tableau de la correspondance entre les nombres d'or et les épactes.

Nombre d'or.	Épactes.
1	*
2	11
3	22
4	3
5	14
6	25
7	6
8	17
9	28
10	9
11	20
12	1
13	12
14	23
15	4
16	15
17	26
18	7
19	18

Digitized by Google

On appelle lettre dominicale, dans le calendrier, celle qui désigne le dimanche. Il y a sept lettres qui deviennent tour à tour dominicales, ce sont A. B. C. D. E. F. G. On place une de ces lettres à côté de chacun des jours de chaque mois, en commençant par le premier janvier et suivant leur ordre naturel; ainsi A se met toujours à côté du premier de janvier, B à côté du 2, ainsi de suite; la lettre dominicale varie tous les ans suivant l'ordre rétrograde, et dans les années bissextiles, il y a deux lettres dominicales; R étant l'initial de mars que nous savons trouver L la lettre dominicale, on a

$$L = 4 - R \text{ ou } 11 - R$$

Si l'année est bissextile, outre cette lettre qui convient aux dix derniers mois, il y en a une deuxième pour janvier et février, qui est

$$L = 5 - R \text{ ou } 12 - R$$

La chose la plus importante à connaître pour former un calendrier, est la *date pascale*, car le jour de Pâques une fois déterminé, les fêtes mobiles sont connues et déterminées. Le concile de Nicée a ordonné qu'on célébrerait la fête de Pâques le dimanche qui suit la pleine lune de l'équinoxe du printemps; elle peut être célébrée 35 jours différens, toujours compris entre le 22 mars et le 25 avril; de la connaissance de R, N et E, on tire celle de la date pascale, au moyen des relations suivantes, dans lesquelles il faut toujours prendre le reste du quotient des quantités entre parenthèses et non le quotient lui-même.

1°. Si E est plus petit que 24, Pâques est le

$$\left[\frac{E - (R+2)}{7}\right] + 45 - E$$

de mars; sauf, si ce résultat passe 31, à ôter 31 et à prendre la date en avril. Si E est plus petit que R+2, on ajoute 7 au numérateur pour le rendre positif.

2°. Si E est égal à 24, Pâques est le

Digitized by Google

$$\left[\frac{7-R}{9}\right] + 19 \text{ d'avril.}$$

3°. Si E est plus grand que 24, Pâques est le

$$\left[\frac{E-(R+4)}{7}\right] + 44 - E \text{ d'avril.}$$

Ce troisième cas offre une exception dans le cas où E = 25, et N est plus grand que 11; quand on trouve 25 avril, il faut rétrograder d'une semaine et prendre le 18 avril.

On pourra s'exercer au calcul de toutes ces formules au moyen des résultats suivans :

ANNÉE.	R.	N	E
1734 on a	= 1	6	25
1954.....	1	17	25
1818.....	9	14	23
1820.....	3	16	25
2258.....	1	17	24
2296.....	0	17	24

On trouvera que pour 1734, la fête de Pâques était le 25 avril; pour 1954, elle sera le 18 avril au lieu du 25; en 1818, elle tombait le 22 mars, et en 2820, le 33 mars c'est-à-dire le 2 avril; enfin, pour 2258 et 2296, elle serait pour le 25 avril et pour le 19 du même mois.

Nous donnerons encore un autre moyen de déterminer la fête de Pâques; c'est une formule de M. Gauss, qu'il est peut-être plus commode d'employer; elle est composée de plusieurs parties :

1°. Divisez le nombre donné de l'année par 19, et soit *a* le reste de la division;

Digitized by Google

2°. Divisez le nombre donné par 4, et nommez b le reste de cette seconde division ;

3°. Divisez le nombre donné par 7, et nommez c le reste de la troisième division ;

4°. Divisez $(19\,a + M)$ par 30, et nommez d le reste de la quatrième division ;

5°. Divisez $(2\,b + 4\,c + 6\,d + N)$ par 7, et nommez e le cinquième reste;

Le jour de Pâques sera le

$$(22 + d + e) \text{ de mars}$$

ou le $(d + e - 9)$ d'avril.

Cette règle est générale pour le calendrier Julien où

$$M = 15 \qquad N = 6$$

constamment.

Elle a besoin d'une correction pour le calendrier Grégorien. Si le calcul donne le 25 ou le 26 d'avril, retranchez 7 jours.

Dans le calendrier Grégorien on a les valeurs de M et de N, par la table ci-jointe, qui suffira jusqu'en 2500.

ANNÉE.	M.	N.
de 1582 à 1699	22	3
1700 à 1799	23	3
1800 à 1899	23	4
1900 à 1999	24	5
2000 à 2099	24	5
2100 à 2199	24	6
2200 à 2299	25	0
2300 à 2399	26	1
2400 à 2499	25	1

Maintenant que nous savons déterminer la fête de Pâques, nous placerons les autres fêtes mobiles d'après le tableau suivant :

Digitized by Google

La Septuagésime,	63 jours avant Pâques.
La Quinquagésime, ou le *dimanche gras.*	49 jours avant Pâques.
Les Cendres ou l'entrée du carême,	le mercredi suivant.
La Passion,	14 jours avant Pâques.
Les Rameaux,	7 jours avant Pâques.
La Quasimodo,	7 jours après Pâques.
L'Ascension,	le jeudi, quarante jours après Pâques.
La Pentecôte,	10 jours après l'Ascension.
La Trinité,	7 jours après la Pentecôte.
La Fête-Dieu,	le jeudi suivant.
L'Avent,	les quatre dimanches avant Noël sont les dimanches de l'Avent.
Les Quatre-temps,	sont les mercredis qui suivent les Cendres, la Pentecôte, le 14 septembre et le 13 décembre.

Les fêtes fixes sont :

La Circoncision, 1er janvier. — Les Rois, 6 janvier. — La Chandeleur, 2 février. — L'Annonciation, 25 mars. — La Saint-Jean d'été, 24 juin. — La Saint-Pierre et Saint-Paul, 29 juin. — L'Assomption, 15 août. — La Nativité, 8 septembre. — La Toussaint, 1er novembre. — La Conception, 8 décembre. — Noël, 25 décembre.

Lorsque le dimanche de Pâques tombe avant le premier avril, l'Annonciation est remise au lundi, huit jours après Pâques.

Ci-joint un calendrier Grégorien perpétuel, établi d'après ces principes. Nous rappellerons que les bissextiles ont deux lettres dominicales, et comme février a un jour de plus que ne porte le calendrier, la lettre qui a désigné dimanche en janvier et février, désigne lundi en mars, avril, etc.

Digitized by Google

J. du m.	JANVIER. Épactes.	Let. dom.	FÉVRIER. Épactes.	Let. dom.	MARS. Épactes.	Let. dom.
1	*	A	29	D	*	D
2	29	B	28	E	29	E
3	28	C	27	F	28	F
4	27	D	25.26	G	27	G
5	26	E	25.24	A	26	A
6	25	F	23	B	25	B
7	24	G	22	C	24	C
8	23	A	21	D	23	D
9	22	B	20	E	22	E
10	21	C	19	F	21	F
11	20	D	18	G	20	G
12	19	E	17	A	19	A
13	18	F	16	B	18	B
14	17	G	15	C	17	C
15	16	A	14	D	16	D
16	15	B	13	E	15	E
17	14	C	12	F	14	F
18	13	D	11	G	13	G
19	12	E	10	A	12	A
20	11	F	9	B	11	B
21	10	G	8	C	10	C
22	9	A	7	D	9	D
23	8	B	6	E	8	E
24	7	C	5	F	7	F
25	6	D	4	G	6	G
26	5	E	3	A	5	A
27	4	F	2	B	4	B
28	3	G	1	C	3	C
29	2	A	*		2	D
30	1	B			1	E
31	*	C			*	F

Digitized by Google

J. du M.	AVRIL. ÉPACTES.	Let. dom.	MAI. ÉPACTES.	Let. dom.	JUIN. ÉPACTES.	Let. dom.
1	29	G	28	B	27	E
2	28	A	27	C	25.26	F
3	27	B	26	D	25.24	G
4	25.26	C	25	E	23	A
5	25.24	D	24	F	22	B
6	23	E	23	G	21	C
7	22	F	22	A	20	D
8	21	G	21	B	19	E
9	20	A	20	C	18	F
10	19	B	19	D	17	G
11	18	C	18	E	16	A
12	17	D	17	F	15	B
13	16	E	16	G	14	C
14	15	F	15	A	13	D
15	14	G	14	B	12	E
16	13	A	13	C	11	F
17	12	B	12	D	10	G
18	11	C	11	E	9	A
19	10	D	10	F	8	B
20	9	E	9	G	7	C
21	8	F	8	A	6	D
22	7	G	7	B	5	E
23	6	A	6	C	4	F
24	5	B	5	D	3	G
25	4	C	4	E	2	A
26	3	D	3	F	1	B
27	2	E	2	G	*	C
28	1	F	1	A	29	D
29	*	G	*	B	28	E
30	29	A	29	C	27	F
31	*		28	D	*	

Digitized by Google

JUILLET.			AOUT.		SEPTEMBRE.	
J. du M.	ÉPACTES.	Let. dom.	ÉPACTES.	Let. dom.	ÉPACTES.	Let. dom.
1	26	G	25.24	C	23	F
2	25	A	23	D	22	G
3	24	B	22	E	21	A
4	23	C	21	F	20	B
5	22	D	20	G	19	C
6	21	E	19	A	18	D
7	20	F	18	B	17	E
8	19	G	17	C	16	F
9	18	A	16	D	15	G
10	17	B	15	E	14	A
11	16	C	14	F	13	B
12	15	D	13	G	12	C
13	14	E	12	A	11	D
14	13	F	11	B	10	E
15	12	G	10	C	9	F
16	11	A	9	D	8	G
17	10	B	8	E	7	A
18	9	C	7	F	6	B
19	8	D	6	G	5	C
20	7	E	5	A	4	D
21	6	F	4	B	3	E
22	5	G	3	C	2	F
23	4	A	2	D	1	G
24	3	B	1	E	*	A
25	2	C	*	F	29	B
26	1	D	29	G	28	C
27	*	E	28	A	27	D
28	29	F	27	B	25.26	E
29	28	G	26	C	25.24	F
30	27	A	25.25	D	23	G
31	25.26	B	24	E		

Digitized by Google

OCTOBRE.			NOVEMBRE.		DÉCEMBRE.	
J. du M.	ÉPACTES.	Let. dom.	ÉPACTES.	Let. dom.	ÉPACTES.	Let. dom.
1	22	A	21	D	20	F
2	21	B	20	E	19	G
3	20	C	19	F	18	A
4	19	D	18	G	17	B
5	18	E	17	A	16	C
6	17	F	16	B	15	D
7	16	G	15	C	14	E
8	15	A	14	D	13	F
9	14	B	13	E	12	G
10	13	C	12	F	11	A
11	12	D	11	G	10	B
12	11	E	10	A	9	C
13	10	F	9	B	8	D
14	9	G	8	C	7	E
15	8	A	7	D	6	F
16	7	B	6	E	5	G
17	6	C	5	F	4	A
18	5	D	4	G	3	B
19	4	E	3	A	2	C
20	3	F	2	B	1	D
21	2	G	1	C	*	E
22	1	A	*	D	29	F
23	*	B	29	E	28	G
24	29	C	28	F	27	A
25	28	D	27	G	26	B
26	27	E	25.26	A	25.25	C
27	26	F	25.24	B	24	D
28	25	G	23	C	23	E
29	24	A	22	D	22	F
30	23	B	21	E	21	G
31	22	C			19.20	A

Digitized by Google

Enfin nous donnerons, d'après l'Encyclopédie mathématique, le *Calendrier des Romains*, tel qu'il fut établi par Jules-César; il contient les 12 mois comme celui de Numa, les uns de 30 jours, les autres de 31; mais au lieu de compter comme nous, le premier du mois, le 2, le 3, etc., le premier jour s'appelait jour des calendes, le suivant était le quatrième ou le sixième avant les nones.

Dans ce calendrier, on voit le même ordre et la même suite de mois que dans celui de Numa; janvier, mars, mai, quintil ou juillet, sextil ou août, octobre et décembre, ont chacun 31 jours; et les quatre mois, avril, juin, septembre et novembre, seulement 30. Février, dans les années communes, n'a que 28 jours, et 29 dans les années intercalaires ou bissextiles. La suite des huit lettres *nundinales*, est placée sans interruption depuis le premier jusqu'au dernier jour de l'année, pour qu'il y ait toujours à chaque année une lettre qui marque les jours des assemblées, appelées *nundinæ* par les Romains, et qui revenaient tous les neuf jours: les citoyens de la campagne se rendaient à la ville ces jours-là, pour y apprendre ce qui concernait la discipline, la religion ou le gouvernement. C'est pourquoi si le jour nundinal de la première année était sous la lettre A, qui est au premier, au neuvième, au dix-septième, au vingt-cinquième de janvier, etc., la lettre du jour nundinal de l'année suivante était D, qui est au quatrième, au douzième, au vingtième du même mois, etc. Car la lettre A se trouvant aussi au vingt-septième de décembre, si de ce jour on compte huit lettres, outre les quatre B, C, D, E, qui restent après A dans le mois de décembre, il en faudra prendre quatre autres au commencement de janvier de l'année suivante, savoir, A, B, C, D, afin que la lettre D, qui se trouve la première dans le mois de janvier, soit la neuvième après le dernier A du mois de décembre précédent, et qu'elle soit par conséquent la lettre nundinale, ou qui marque les jours de ces assemblées; auxquelles on peut donner aussi le nom de

Digitized by Google

foires ou *marchés publics*. Ainsi, par le même calcul, la lettre nundinale de la troisième année sera G, celle de la quatrième B, et ainsi des autres, à moins qu'il n'arrive du changement par l'intercalation.

Pour entendre les lettres marquées dans la seconde colonne, pour la qualité de chaque jour, il faut savoir que l'on ne pouvait plaider et juger qu'à certains jours. On appelait *fastos*, en français *fastes*, les jours auxquels on pouvait rendre la justice, *quibus fas esse jure agere;* et *nefastos*, ceux auxquels cela n'était pas permis, *quibus nefas esset*, comme nous l'apprenons dans ces deux vers d'Ovide :

Ille nefastus erit per quem tria verba silentur;
Fastus erit per quem jure licebis agi.

C'est-à-dire, que le jour est néfaste, dans lequel le préteur ne prononce point les trois mots solennels, ou la formule de droit, *do*, *dico*, *addico*, comme on dirait chez nous qu'il est fête ou vacance au palais; il y avait aussi de certains jours qu'on appelait *comitiaux*, marqués par un C, dans lesquels le peuple s'assemblait au champ de Mars, pour élire les magistrats, ou pour y traiter des affaires de la république; ces assemblées du peuple étaient appelées *comitia*, comices. Le prêtre ou sacrificateur, qui était appelé *Rex*, se trouvait quelquefois dans ces comices; enfin il y avait un jour de l'année où l'on avait coutume de nettoyer le temple de Vesta, et d'en transporter le fumier; ce qui se faisait avec tant de cérémonie, qu'il n'était pas permis de plaider pendant ce temps-là.

Ces remarques suffisent pour entendre les lettres de la seconde colonne. 1°. La lettre N signifie *nefastus dies*, ou *jour néfaste;* cela signifie qu'on ne peut pas rendre la justice en ce jour. 2°. F, ou *fastus*, veut dire qu'on peut rendre la justice. 3°. F P, ou *fastus primâ parte diei*, signifie qu'on peut la rendre dans la première partie du jour. 4°. N P, ou *nefastus primâ parte diei*, qu'on ne peut pas la rendre dans

Digitized by Google

la première partie du jour. 5°. E N, ou *endotercisus* ou *intercisus*, c'est-à-dire entrecoupé, qu'on le peut dans certaines heures, et qu'on ne le peut pas dans d'autres. 6° C, ou *comitialis*, veut dire que l'on tient en ce jour-là les assemblées qu'on appelle *comices*. 7°. Quand il y a ces lettres Q, *rex* C, F, ou *quando rex comitavit*, *fas*, qu'on le peut lorsque le sacrificateur, appelé le *roi*, a assisté aux comices. 8°. Enfin ces lettres Q, S T, D, F, signifient *quando stercus delatum*, *fas*, qu'on le peut aussitôt que le fumier a été transporté hors du temple de la déesse Vesta.

La troisième colonne est pour les dix-neuf caractères des nombres du cycle lunaire, ou *nombre d'or*, pour marquer les nouvelles lunes dans toute l'année, suivant l'ordre auquel elles arrivaient du temps de Jules-César; du moins plusieurs savans ont pensé qu'on avait compté ainsi dès le temps de César, et qu'on avait pris pour la première année du cycle lunaire l'an 45 avant J. C. ou l'année de la réforme julienne; il est vrai que la nouvelle lune, cette année-là, fut le 1er janvier: mais Scaliger et Petau pensent que ces nombres n'ont été mis dans le *calendrier* julien que depuis le concile de Nicée.

Quoi qu'il en soit, cette colonne est tirée de Gauricus, et le P. Petau, *l.* 6, *c.* 14, en a donné l'explication détaillée. Dans la première année du cycle de dix-neuf ans, la nouvelle lune arrivait le 1er janvier et le 31, le 1er mars et le 31, le 29 avril, etc., en sorte qu'on trouve le nombre I vis-à-vis de tous ces jours-là. Le nombre II se trouve vis-à-vis de tous les jours de l'année, où arrivait la nouvelle lune dans la seconde année de chaque cycle de dix-neuf ans, comme au 20 janvier, au 18 février, etc., qui étaient des jours de nouvelle lune, l'an 44 avant J. C. ou 43, suivant la manière de compter des astronomes. Cela suffirait pour trouver les nouvelles lunes d'une année quelconque dans l'histoire romaine; car tous les dix-neuf ans elles revenaient au 1er janvier.

La quatrième colonne marque la suite des jours des mois, suivant notre usage; on les a mis pour

Digitized by Google

montrer le rapport qu'il y a entre la manière de nommer et de compter les jours des romains et la nôtre, et faire voir quels sont, selon notre façon de compter, les jours auxquels les fêtes romaines peuvent répondre.

La cinquième colonne contient la division des mois en calendes, nones et ides, qui étaient en usage parmi les Romains. Les mois de mars, mai, juillet et octobre ont six jours de nones, et tous les autres n'en ont que quatre ; mais il y a dans tous huit jours d'ides ; ce qu'il faut entendre ainsi, savoir : que le premier jour de chaque mois s'appelle toujours *calendæ* ou *kalendæ*, les calendes ; qu'aux quatre mois, mars, mai, juillet et octobre, le septième du mois s'appelle *nonæ*, les nones, et le treizième *idus*, les ides. Les autres jours se comptent à rebours du mois suivant, comme le 28, le 29, etc., avant les calendes du *mois* suivant. Les jours qui sont depuis les calendes jusqu'aux nones, prennent le nom de nones du mois courant : les autres jours qui sont entre les nones et les ides, prennent aussi le nom des ides du même mois ; mais tous les autres jours depuis les ides jusqu'à la fin, prennent le nom des calendes du mois suivant. On voit, au reste, que les tables des fastes, sur lesquelles les Romains plaçaient leurs mois et leurs jours par année, prirent dans la suite le nom de *calendrier*, parce que ce nom de *calendes* était écrit en gros caractères à la tête de chaque mois.

Enfin la dernière colonne comprend les choses qui appartiennent principalement à la religion des Romains, comme sont les fêtes, les sacrifices, les jeux ; les cérémonies, les jours heureux ou malheureux ; aussi-bien que les commencemens des signes, les quatre points cardinaux de l'année, qui sont les quatre saisons, le lever et le coucher des étoiles. Cela était d'un grand usage parmi les anciens, qui s'en sont long-temps servi pour marquer la différence des saisons, au lieu de *calendrier*, au moins jusqu'à ce qu'il eût été rédigé dans une forme plus régu-

Digitized by Google

lière par la correction de Jules-César. Nous voyons dans la plupart des livres anciens que l'on se gouvernait entièrement par l'observation du lever et du coucher des étoiles, dans la navigation, dans l'agriculture, dans la médecine et dans la plus grande partie des affaires publiques et particulières, parce que les apparitions d'étoiles étaient plus faciles à bien distinguer que les limites des saisons et l'inégalité des jours.

Digitized by Google

JANVIER,

SOUS LA PROTECTION DE JUNON.

Lettres dominicales	Qualités des Jours.	Nomb. d'or	J. du Mois.			
A	F	1	1	*Kal.*	Januar.	Sacrifices à Janus, à Junon, à Jupiter et à Esculape.
B	F		2	4	Nonas.	Jour malheureux, *Dies atèr*
C	C	9	3	3	Nonas.	Coucher de l'Ecrevisse.
D	C		4	Pridie	Nonas.	
E	F	18	5	*Nonis*	Januar.	Lever de la Lyre. Coucher au soir de l'Aigle.
F	F	6	6	8	Idus.	
G	C		7	7	Idus.	
H	C	14	8	6	Idus.	Sacrifices à Janus.
A		3	9	5	Idus.	Les Agonales.
B	EN		10	4	Idus.	Milieu de l'hiver.
C	NP	11	11	3	Idus.	Les Carmentales.
D	C		12	Pridie	Idus.	Les Compitales.
E	NP	19	13	*Idibus*	Januar.	Les trompettes font des publications par la ville, en habit de femme.
F	EN	8	14	19	K. Febr.	Jour vicieux par décret du Sénat.
G			15	18	K. Febr.	A Carmenta, Porrima et Postverta.
H	C	16	16	17	K. Febr.	A la Concorde. Commencement du coucher au matin du Lion.
A	C	5	17	16	K. Febr.	Le Soleil dans le Verseau.
B	C		18	15	K. Febr.	
C	C	13	19	14	K. Febr.	
D	C	2	20	13	K. Febr.	
E	C		21	12	K. Febr.	
F	C	10	22	11	K. Febr.	
G	C		23	10	K. Febr.	Coucher de la Lyre.
H	C	18	24	9	K. Febr.	Les fêtes sementines ou des semailles.
A	C	7	25	8	K. Febr.	
B	C		26	7	K. Febr.	
C	C	15	27	6	K. Febr.	A Castor et Pollux.
D	C	4	28	5	K. Febr.	
E	F		29	4	K. Febr.	Les Equiries au champ de Mars.
F	F	12	30	3	K. Febr.	Coucher de la Fidicule, ou Lyre. Les Pacales, ou Dédicace de l'Autel de la Paix.
G		1	31	Pridie	K. Febr.	Aux dieux Pénates.

Digitized by Google

FÉVRIER,
SOUS LA PROTECTION DE NEPTUNE.

Lettres dominicales.	Qualités des Jours.	Nombre d'or.	J. du mois.			
H	N	9	1	*Kal.*	Febr.	A Junon Sospita, à Jupiter, à Hercule, à Diane. Les Lucaires.
A	N	18	2	4	Nonas.	
B	N		3	3	Nonas.	Coucher de la Lyre et du milieu du Lion.
C	N	6	4	Pridie	Nonas.	Coucher du Dauphin.
D	N		5	*Nonis*	Febr.	Lever du Verseau.
E	N	14	6	8	Idus.	
F	N	3	7	7	Idus.	
G	N		8	6	Idus.	
H	N	11	9	5	Idus.	Commencement du printemps.
	N		10	4	Idus.	
	N	19	11	3	Idus.	Jeux génialiques. Lever de l'Arcture.
A	N	8	12	Pridie	Idus.	
D	NP		13	*Idibus*	Febr.	A Faune et à Jupiter. Défaite et mort des Fabiens.
E	C	16	14	16	K. Mart.	Lever du Corbeau, de la Coupe et du Serpent.
F	NP	5	15	15	K. Mart.	Les Lupercales.
G	END		16	14	K. Mart.	Le Soleil au signe des Poissons.
H	NP	13	17	13	K. Mart.	Les Quirinales.
A	C	2	18	12	K. Mart.	Les Fornacales. Les Férales aux dieux Mânes.
B	C		19	11	K. Mart.	
C	C	10	20	10	K. Mart.	
D	F		21	9	K. Mart.	A la déesse Muta ou Larunda. Les Féraies.
E	C	18	22	8	K. Mart.	Les Carysties.
F	NP	7	23	7	K. Mart.	Les Terminales.
G	N		24	6	K. Mart.	Le Régifuge. Lieu du Bissexte.
H	C	15	25	5	K. Mart.	Lever au soir de l'Arcture.
A	EN	4	26	4	K. Mart.	
B	NP		27	3	K. Mart.	Les Équiries au champ de Mars.
C	C	12	28	Pridie	K. Mart.	Les Tarquins vaincus.

Digitized by Google

MARS,

SOUS LA PROTECTION DE MINERVE.

Lettres dominicales.	Qualités des jours.	Nomb. d'or	J. du mois.			
D	N P	1	1	*Kal.*	Mart.	Les Matronales. A Mars. Fêtes des Anciles.
E	F		2	6	Nonas.	A Junon Lucine.
F	C	9	3	5	Nonas.	Coucher du second des poissons.
G	C		4	4	Nonas.	
H	C	17	5	3	Nonas.	Coucher de l'Arcture. Lever du Vendangeur. Lever de l'Ecrevisse.
A	N P	6	6	Pridie	Nonas.	Les Vestaliennes. En ce jour, Auguste fut créé grand Pontife.
B	F		7	*Nonis*	Mart.	A Vé-Jupiter au bois de l'asile. Lever du Pégase.
C	F	14	8	8	Idus.	Lever de la Couronne.
D	C	3	9	7	Idus.	Lever de l'Orion. Lever du Poisson septentrional.
E	C		10	6	Idus.	
F	C	11	11	5	Idus.	
G	C		12	4	Idus.	
H	E N	19	13	3	Idus.	Ouverture de la mer.
A	N P	8	14	Pridie	Idus.	Les Equiries secondes sur le Tibre.
B	N P		15	*Idibus*	Mart.	A Anna Pérenne. Le Parricide. Coucher du Scorpion.
C	F	16	16	17	K. Apr.	
D	N P	5	17	16	K. Apr.	Les Libérales ou les Bacchanales. Les Agones. Coucher du Milan.
E	C		18	15	K. Apr.	Le Soleil au signe du Bélier.
F	N	13	19	14	K. Apr.	Les Quinquatres de Minerve pendant cinq jours.
G	C	2	20	13	K. Apr.	
H	C		21	12	K. Apr.	Premier jour du siècle. Coucher au matin du Cheval.
A	N	10	22	11	K. Apr.	
B	N P		23	10	K. Apr.	Le Tubilustre.
C	Q. Rex. C. F.	18	24	9	K. Apr.	
D	C	7	25	8	K. Apr.	Les Hilaries à la mère des dieux. Equinoxe du printemps.
E	C		26	7	K. Apr.	
F	N P	15	27	6	K. Apr.	En ce jour, César se rendit maître d'Alexandrie.
G	C	4	28	5	K. Apr.	Les Mégalésiens.
H	C		29	4	K. Apr.	
A	C	12	30	3	K. Apr.	A Janus, à la Concorde, au Salut et à la Paix.
B	C	1	31	Pridie	K. Apr.	A la Lune ou à Diane sur l'Aventin.

Digitized by Google

AVRIL,
SOUS LA PROTECTION DE VÉNUS.

Qualités des jours.	Nomb. d'or	J. du mois.			
N	9	1	*Kal.*	Aprilis.	A Vénus, avec des fleurs et du myrte. A la Fortune virile.
C		2	4	Nonas.	Coucher des Pléiades.
C	18	3	3	Nonas.	
C	6	4	Pridie	Nonas.	Jeux Mégalésiens à la mère des dieux, pendant huit jours.
		5	*Nonis*	Aprilis.	A la Fortune publique citérieure.
NP	14	6	8	Idus.	Jeux pour la victoire remportée par César sur Juba en Afrique.
N	3	7	7	Idus.	Naissance d'Apollon et de Diane.
N		8	6	Idus.	Coucher de la Balance. Coucher d'Orion.
N	11	9	5	Idus.	
N		10	4	Idus.	Les Cérèales. Les jeux Circenses.
N	19	11	3	Idus.	A la Fortune primigénie.
N	8	12	Pridie	Idus.	La mère des dieux amenée à Rome. Jeux en l'honneur de Cérès, pendant huit jours.
NP		13	*Idibus*	April.	A Jupiter vainqueur, et à la liberté.
N	16	14	18	K. Maii.	
NP	5	15	17	K. Maii.	Les Fordiciles ou Fordicales.
N		16	16	K. Maii.	Auguste salué empereur. Coucher des Hyades.
N	13	17	15	K. Maii.	
N	2	18	14	K. Maii.	Les Équiries au grand Cirque. Brûlement des renards.
N		19	13	K. Maii.	Les Céréales. Le Soleil au signe du taureau.
N	10	20	12	K. Maii.	
NP		21	11	K. Maii.	Les Paliliennes ou Pariliennes. Naissance de Rome.
N	18	22	10	K. Maii.	Les secondes Agoniennes ou Agonales.
NP	7	23	9	K. Maii.	Les premières Vinaliennes à Jupiter et à Vénus.
C		24	8	K. Maii.	
NP	15	25	7	K. Maii.	Les Robigales. Coucher du Bélier. Milieu du printemps.
F	4	26	6	K. Maii.	Lever du Chien. Lever des Chevreaux.
C		27	5	K. Maii.	Les Féries latines au Mont-Sacré.
NP	12	28	4	K. Maii.	Les Florales pendant six jours. Lever au matin de la Chèvre.
C	1	29	3	K. Maii.	Coucher au soir du chien.
C		30	Pridie	K. Maii.	A Vesta Palatine. Les premières Lavenales.

Digitized by Google

MAI,
SOUS LA PROTECTION D'APOLLON.

Lettres nundinales	Qualités des Jours.	NOMB. D'OR	J. du mois.			
A	N	9	1	*Kal.*	Maii.	A la bonne Déesse. Aux Lares Prestites ou Protecteurs. Jeux floraux pendant trois jours.
B	F		2	6	Nonas.	Les Compitales.
C	C		3	5	Nonas.	Lever du Centaure et des Hyades.
D	C	17	4	4	Nonas.	
E	C	6	5	3	Nonas.	Lever de la Lyre.
F	C		6	Pridie	Nonas.	Coucher du milieu du Scorpion.
G	N	14	7	*Nonis*	Maii.	Lever au matin des Virgilies, ou Pléiades.
H	F	3	8	8	Idus.	Lever de la Chevrette. (Chèvre.)
A	N		9	7	Idus.	Les Lémuriennes de nuit pendant trois jours. Les Luminaires.
B	C	11	10	6	Idus.	
C	N		11	5	Idus.	Coucher d'Orion. Jour malheureux pour se marier.
D	NP	19	12	4	Idus.	A Mars le vengeur au cirque.
E	N	8	13	3	Idus.	Les Lémuriennes. Lever des Pléiades. Commencement de l'été.
F	C		14	Pridie	Idus.	A Mercure. Lever du Taureau.
G	NP	16	15	*Idibus*	Maii.	A Jupiter. Fêtes des marchands. Naissance de Mercure. Lever de la Lyre.
H	F	5	16	17	K. Jun.	
A	C		17	16	K. Jun.	
B	C	13	18	15	K. Jun.	
C	C	2	19	14	K. Jun.	Le Soleil dans les Gémeaux.
D	C		20	13	K. Jun.	
E	NP	10	21	12	K. Jun.	Les Agonales ou Agoniennes de Janus.
F	N		22	11	K. Jun.	A Vé-Jupiter. Lever du Chien.
G	NP	18	23	10	K. Jun.	Les Féries de Vulcain. Les Tubilustres.
H	QRex.C.F.	7	24	9	K. Jun.	
A	C		25	8	K. Jun.	A la Fortune. Lever de l'Aigle.
B	C	15	26	7	K. Jun.	Le second Régifuge. Coucher de l'Arcture.
C	C	4	27	6	K. Jun.	Lever des Hyades.
D	C		28	5	K. Jun.	
E	C	12	29	4	K. Jun.	
F	C	1	30	3	K. Jun.	
G	C	9	31	Pridie	K. Jun.	

Digitized by Google

JUIN,
SOUS LA PROTECTION DE MERCURE.

Qualités des Jours.	NOMB. D'OR	J. du mois.			
N	17	1	*Kal.*	Jun.	A Junon. A la Monnoie. A Tempestas. A Fabaria. Lever de l'Aigle.
F	6	2	4	Nonas.	A Mars, à la déesse Carna. Lever des Hyades.
C		3	3	Nonas.	A Bellone.
C	14	4	Pridie	Nonas.	A Hercule au Cirque.
N	3	5	*Nonis*	Jun.	A la Foi. A Jupiter Sponsor ou au dieu Fidius, Saint, Semipater.
N		6	8	Idus.	A Vesta.
N	11	7	7	Idus.	Les jours Piscatoriens au champ de Mars. Lever de l'Arcture.
N		8	6	Idus.	A l'entendement au Capitole.
N P	19	9	5	Idus.	Les Vestaliennes. Autel de Jupiter Pistor. Couronnement des ânes.
N	8	10	4	Idus.	Les Matraliennes de la Fortune forte. Lever au soir du Dauphin.
N		11	3	Idus.	A la Concorde. A la mère Matuta.
N	16	12	Pridie	Idus.	A Jupiter Invictus. Le petit Quinquatrus. Commencement de la chaleur.
N	5	13	*Idibus*	Jun.	
N		14	18	K. Jul.	
Q.ST.D.F.	13	15	17	K. Jul.	Transport du temple de Vesta. Lever des Hyades.
C	2	16	16	K. Jul.	Lever d'Orion.
C		17	15	K. Jul.	Lever du Dauphin entier.
C	10	18	14	K. Jul.	
C		19	13	K. Jul.	A Minerve au mont Aventin. Le Soleil au signe du Cancer.
C	18	20	12	K. Jul.	A Summanus. Lever du Serpentaire.
C	7	21	11	K. Jul.	
C		22	10	K. Jul.	
C	15	23	9	K. Jul.	
C	4	24	8	K. Jul.	A la Fortune forte. Solstice d'été.
C		25	7	K. Jul.	
C	12	26	6	K. Jul.	Lever de la Ceinture d'Orion.
C	1	27	5	K. Jul.	A Jupiter Stator et au Lar.
C		28	4	K. Jul.	
F	9	29	3	K. Jul.	A Quirinus au mont Quirinal.
C		30	Pridie	K. Jul.	A Hercule et aux Muses. Les Popilifuges.

Digitized by Google

QUINTILE ou JUILLET,

SOUS LA PROTECTION DE JUPITER.

Lettres dominicales.	Qualités des jours.	nons. d'os	J. du mois.		
F	N	17	1	*Kal.*	Jul. Passage d'une maison en d'autres.
G	N	6	2	6	Nonas.
H	N		3	5	Nonas.
A	NP	14	4	4	Nonas. Coucher au matin de la Couronne. Lever des Hyades.
B	N	3	5	3	Nonas. Le Poplifuge.
C	N		6	Pridie	Nonas. Jeux Apollinaires pendant huit jours. A la Fortune féminine.
D	N	11	7	*Nonis*	Jul. Les Nones caprotines. La fête des Servantes. Disparition de Romulus.
E	N		8	8	Idus. La Vitolation. Coucher du milieu du Capricorne.
F	EN	19	9	7	Idus. Lever au soir de Céphée.
G	C	8	10	6	Idus. Les vents étésiens commencent à souffler.
H	C		11	5	Idus.
A	NP	16	12	4	Idus. Naissance de Jules-César.
B	C	5	13	3	Idus.
C	C		14	Pridie	Idus. A la Fortune féminine. Les Mercatus ou les Mercuriales, pendant six jours.
D	NP	13	15	*Idibus*	Jul. A Castor et à Pollux.
E	F	2	16	17	K. Aug. Lever de l'Avant-Chien.
F	C		17	16	K. Aug. Jour funeste de la bataille d'Allia.
G	C	10	18	15	K. Aug. Les Lucariens. Jeux pendant quatre jours.
H	NP		19	14	K. Aug. Jeux pour la victoire de César. Le Soleil au signe du Lion.
A	C	18	20	13	K. Aug. Les Lucariennes.
B		7	21	12	K. Aug.
C	C		22	11	K. Aug. Jeux de Neptune.
D		15	23	10	K. Aug.
E	N	4	24	9	K. Aug. Les Furinales. Jeux Circenses pendant six jours. Coucher du Verseau.
F	NP		25	8	K. Aug. Lever de la Canicule.
G	C	12	26	7	K. Aug. Lever de l'Aigle.
H	C	1	27	6	K. Aug.
					K. Aug.
A	C		28	5	K. Aug.
B	C	9	29	4	K. Aug. Coucher de l'Aigle.
C	C		30	3	K. Aug.
D	C	17	31	Pridie	K. Aug.

Digitized by Google

SEXTILE ou AOUT,
SOUS LA PROTECTION DE CÉRÈS.

Jours des Jours.	nomb. d'or	J. du mois.			
N	6	1	*Kal.*	Aug.	A Mars. A l'Espérance.
C	14	2	14	Nonas.	Féries. De ce que César a subjugué l'Espagne.
C	3	3	3	Nonas.	
C		4	Pridie	Nonas.	Lever du milieu du Lion.
F	11	5	*Nonis*,	Aug.	Au Salut au mont Quirinal.
F		6	8	Idus.	A l'Espérance. Coucher du milieu de l'Arcture.
C	19	7	7	Idus.	Coucher du milieu du Verseau.
C	8	8	6	Idus.	Au Soleil indigète au mont Quirinal.
P		9	5	Idus.	
C	16	10	4	Idus.	A Opis et à Cérès.
C	5	11	3	Idus.	A Hercule au cirque Flaminien. Coucher de la Lyre. Commencement de l'automne.
C		12	Pridie	Idus.	Les Ligna pésies.
P	13	13	*Idibus*	Aug.	A Diane au bois Aricien. A Vertumne. Fêtes des esclaves et des servantes.
F	2	14	19	K. Sept.	Coucher au matin du Dauphin.
C		15	18	K. Sept.	
C	10	16	17	K. Sept.	
P		17	16	K. Sept.	Les Portumnales. A Janus.
C	18	18	15	K. Sept.	Les Consuales. Ravissement des Sabines.
P	7	19	14	K. Sept.	Les Vinales dernières. Mort d'Auguste.
C		20	13	K. Sept.	Coucher de la Lyre. Le Soleil au signe de la Vierge.
P	15	21	12	K. Sept.	Les Vinales rustiques. Les grands Mystères. Les Consuales.
N	4	22	11	K. Sept.	Lever au matin du Vendangeur.
P		23	10	K. Sept.	Les Vulcanales au cirque Flaminien.
C	12	24	7	K. Sept.	Les Féries de la Lune.
P	1	25	8	K. Sept.	Les Opiconsives au Capitole.
C		26	7	K. Sept.	
P	9	27	6	K. Sept.	Les Volturnales.
P		28	5	K. Sept.	A la Victoire in Curia. Coucher de la flèche. Fin des vents étésiens.
F	17	29	4	K. Sept.	
F	6	30	3	K. Sept.	On montre les ornemens de la déesse Cérès.
C		31	Pridie	K. Sept.	Lever du soir d'Andromède.

Digitized by Google

SEPTEMBRE,
SOUS LA PROTECTION DE VULCAIN.

Lettres dominicales.	Qualités des Jours.	Nomb. d'on	J. du mois.			
D	N	14	1	*Kal.*	Septemb.	A Jupiter Maimactes. Fêtes à Neptune.
E	N	3	2	4	Nonas.	A la victoire d'Auguste. Féries.
F	NP		3	3	Nonas.	Les Dionysiaques ou les Vendanges.
G	C	11	4	Pridie	Nonas.	Jeux Romains pendant huit jours.
H	F		5	*Nonis*	Sept.	
A	F	19	6	8	Idus.	A l'Érèbe d'un bélier et d'une brebis noire.
B	C	8	7	7	Idus.	
C	C		8	6	Idus.	
D	C	16	9	5	Idus.	Lever de la Chevrette (le soir).
E	C	5	10	4	Idus.	Lever de la Tête de Méduse.
F	C		11	3	Idus.	Lever du milieu de la Vierge.
G	N	13	12	Pridie	Idus.	Lever du milieu de l'Arcture.
H	NP	2	13	*Idibus*	Sept.	A Jupiter. Dédicace du Capitole. Le clou fiché par le Préteur. Départ des Hirondelles.
A	F		14	18	K. Oct.	Épreuve des Chevaux.
B		10	15	17	K. Oct.	Les grands Jeux Circenses voués pendant cinq jours.
C	C		16	16	K. Oct.	
D	C	18	17	15	K. Oct.	
E	C	7	18	14	K. Oct.	Lever au matin de l'Épi de la Vierge.
F	C		19	13	K. Oct.	Le Soleil dans le signe de la Balance.
G	C	15	20	12	K. Oct.	Le Mercatus pendant quatre jours. Naissance de Romulus.
H	C	4	21	11	K. Oct.	
A	C		22	10	K. Oct.	Coucher d'Argo et des Poissons.
B	NP	12	23	9	K. Oct.	Jeux Circenses. Naissance d'Auguste. Lever au matin du Centaure.
C	C	1	24	8	K. Oct.	Équinoxe de l'automne.
D	C		25	7	K. Oct.	A Vénus, à Saturne et à Mania.
E	C	9	26	6	K. Oct.	
F	C		27	5	K. Oct.	A Vénus mère. A la Fortune de retour.
G	C	17	28	4	K. Oct.	Fin du lever de la Vierge.
H	F	6	29	3	K. Oct.	
A	C	14	30	Pridie	K. Oct.	Festin à Minerve. Les Méditrinales.

Digitized by Google

DÉCEMBRE,
SOUS LA PROTECTION DE VESTA.

des Jours.	nomb. d'or	J. du mois.			
N	11	1	*Kal.*	Décemb.	A la Fortune féminine.
		2	4	Nonas.	
	19	3	3	Nonas.	
	8	4	Pridie	Nonas.	A Minerve et à Neptune;
F		5	*Nonis*	Décemb.	Les Faunales.
C	16	6	8	Idus.	Coucher du milieu du Sagittaire.
C	5	7	7	Idus.	Lever au matin de l'Aigle.
C		8	6	Idus.	
C	13	9	5	Idus.	A Junon Jugale.
C	2	10	4	Idus.	
P		11	3	Idus.	Les Agonales. Les quatorze jours Alcyoniens.
N	10	12	Pridie	Idus.	
P		13	*Idibus*	Décemb.	Les Equiries ou course des Chevaux.
F	18	14	19	K. Jan.	Les Brumales. Les Ambrosiannes.
P	7	15	18	K. Jan.	Les Consuales. Lever du matin de l'Ecrevisse entière.
C		16	17	K. Jan.	
		17	16	K. Jan.	Les Saturnales pendant cinq jours.
C	15	18	15	K. Jan.	Lever du Cygne. Le Soleil au signe du Capricorne.
P	4	19	14	K. Jan.	Les Opaliennes.
C		20	13	K. Jan.	Les Sigillaires pendant deux jours.
P	12	21	12	K. Jan.	Les Angéronales. Les Divales. A Hercule et à Vénus, avec du vin miellé.
C	1	22	11	K. Jan.	Les Compitales. Les Féries dédiées aux Lares. Jeux.
P	9	23	10	K. Jan.	Les Féries de Jupiter. Les Laurentinales ou Laurentinales. Coucher de la Chèvre.
C		24	9	K. Jan.	Les Juvénales. Jeux.
C	17	25	8	K. Jan.	La fin des Brumales. Solstice d'hiver.
C	6	26	7	K. Jan.	
C		27	6	K. Jan.	A Phébus pendant trois jours. Lever au matin du Dauphin.
C	14	28	5	K. Jan.	
F	3	29	4	K. Jan.	Coucher au soir de l'Aigle.
F		30	3	K. Jan.	Coucher au soir de la Canicule.
P	11	31	Pridie	K. Jan.	

Digitized by Google

GNOMONIQUE.

La gnomonique est l'art de construire les cadrans solaires. Avant l'introduction des horloges, la construction de ces cadrans était une branche d'industrie et de commerce; elle eut donc ses modes et ses fantaisies; de là une foule de problèmes, plus curieux qu'utiles, pour lesquels nous renvoyons le lecteur aux traités spéciaux, nous bornant à présenter ici le tracé et les calculs relatifs aux cadrans le plus généralement employés. On ne saurait douter de l'antiquité des cadrans solaires; il est prouvé par les saintes Ecritures, qu'Achaz, vers l'an 751 avant notre ère, possédait une horloge de cette espèce. C'est donc à tort que les gens de lettres, se fondant sur les écrits de Pline, attribuent à Anaximène l'invention de ces cadrans.

Il est nécessaire, avant de passer à la construction des cadrans, de définir quelques termes, et de poser quelques principes qui faciliteront l'intelligence de cette exposition.

Par l'effet du mouvement diurne, le soleil paraît décrire autour de notre axe des arcs de 15° par heure; or, si l'on conçoit la sphère coupée par douze plans passant tous par les pôles, et distans entre eux de 15°, le soleil les atteindra successivement dans des intervalles égaux, et ces *plans horaires* rencontreront l'horizon rationnel suivant douze droites qui prennent le nom de *lignes horaires*. Si, maintenant, on fait abstraction de ces cercles pour ne conserver que l'axe terrestre et le plan qui contient leurs traces, ou les *lignes horaires*, l'on aura un cadran solaire placé au centre de la terre; mais à cause de la grande distance du soleil, et de la petitesse de notre globe, un point quelconque de la surface peut être considéré, dans le cas actuel, comme le centre de la sphère; dès-lors, si l'on y transporte parallèlement à leur première position, et le plan et l'axe, le ca-

Digitized by Google

dran solaire sera tracé pour ce lieu. Il résulte de là que, 1°. *dans tout cadran solaire, le style est situé dans le méridien*; 2°. *que de plus il est parallèle à l'axe de la terre, c'est-à-dire que pour le lieu où le cadran est construit, ce style est incliné sur l'horizon, comme l'est l'axe terrestre, d'un nombre de degrés égal à l'élévation du pôle qui, comme on sait, est égal à la latitude.*

Il faut donc, avant de procéder à la construction d'un cadran, 1°. tracer une méridienne; 2°. chercher l'élévation du pôle, ou la latitude du lieu. Nous allons résoudre le premier problème assez exactement pour le but que nous nous proposons; la table qu'on trouve à la fin de ce chapitre, résout le second pour les principales villes; pour les lieux qui ne sont point compris dans cette table, il faudra consulter un bon dictionnaire géographique.

TRACER UNE MÉRIDIENNE.

On cherchera un endroit où le soleil donne en toute saison depuis neuf heures du matin jusqu'après trois heures du soir : un mur à hauteur d'appui, ou une petite colonne de trois à quatre pieds, fondée sur un massif de maçonnerie, seront très-convenables.

On placera à demeure sur ce mur, ou ce piédestal, une ardoise, une pierre de marbre, ou de grès, bien plane et adoucie; on la rendra bien horizontale par les moyens connus, de l'équerre avec un à-plomb, ou du niveau à bulle d'air; ou bien encore par le procédé très-simple de verser de l'eau dessus et de soulever la pierre doucement par des coins, du côté vers lequel l'eau tend à s'écouler; on la garnira de plâtre dessous et autour, afin de l'établir solidement. Elle serait très solide si on la contenait par un ou deux boulons intérieurs, entrant de part et d'autre à demi-épaisseur.

On choisira sur cette pierre, près de son bord méridional, un point, autour duquel on décrira deux ou trois arcs de cercles concentriques, distans

Digitized by Google

l'un de l'autre d'environ un quart de pouce, et de l'étendue de 130 à 140 degrés.

On élevera perpendiculairement sur ce centre, un *style* ou aiguille, de la longueur convenable pour que vers neuf heures du matin, dans la saison dans laquelle on opérera, la pointe de l'ombre du style se trouve un peu en dehors du plus grand des trois cercles tracés. Il sera très-commode d'avoir pour style une tige cylindrique, mobile du haut en bas dans un cylindre creux, dont le pied évidé forme un épatement circulaire, au milieu duquel la tige mobile, terminée en bas par une pointe très-fine, rencontre le centre des cercles, tandis que son extrémité supérieure porte une rondelle percée d'un trou qui forme un point lumineux, objet bien plus précis à observer que ne l'est l'ombre de la pointe d'un corps opaque, toujours mal terminée à cause de la pénombre qui l'accompagne.

Le style étant ainsi préparé, on choisira une journée où l'on puisse espérer que le soleil luira le matin et l'après-midi; et, vers neuf heures du matin, on ira observer l'instant où le centre du point lumineux se trouvera précisément sur la circonférence de chacun des trois cercles qu'il traversera successivement, à mesure que le soleil s'élevera sur l'horizon, en s'approchant en même temps du méridien; et on marquera d'un trait bien fin sur chacune de ces circonférences, l'endroit précis où le centre du point lumineux (ou la pointe du style, si l'on en emploie un) les aura respectivement traversées.

Après midi, on surveillera le moment auquel le point lumineux (ou la pointe de l'ombre du style) s'approchera du cercle intérieur, et on marquera de même d'un trait, l'endroit où chacune des trois circonférences sera coupée par le point lumineux (ou la pointe d'ombre).

Alors, avec un compas ordinaire, on partagera en deux, sur chaque circonférence, l'arc compris entre le point marqué le matin, et celui marqué

Digitized by Google

l'après-midi ; et, posant ensuite le bord d'une règle bien droite, d'une part sur le centre commun des trois cercles, et d'autre part sur la bissection des trois arcs, la ligne tracée le long de cette règle sera la méridienne ; et, si les trois bissections se trouvent confondues dans cette ligne, on aura la preuve de l'exactitude de l'opération ; sinon, on donnera à la ligne une direction moyenne entre ces trois résultats.

La méridienne, ainsi tracée, n'est sensiblement exacte que lorsqu'on opère dans l'une des deux saisons qui répondent aux solstices. Vers les équinoxes, elle exige une correction d'environ un quart de minute, ou 15″ de temps, dont elle se trouve trop à l'occident vers l'équinoxe du printemps, et trop à l'orient vers celui d'automne, en supposant qu'il se soit écoulé environ six heures entre les observations du matin et celles de l'après-midi : on peut aisément faire cette correction, en observant la quantité de chemin que fait le point lumineux (ou l'ombre du style) en une minute, immédiatement avant, ou après-midi ; le quart de cette quantité sera la correction cherchée, qu'on aura soin d'appliquer dans le sens convenable, avant de tracer la méridienne définitive.

CADRAN ÉQUINOXIAL.

Procédons maintenant au tracé des cadrans, et commençons par le plus facile, celui du *cadran équinoxial* ; la construction en est si simple qu'on la peut concevoir facilement sans figure.

En effet, il suffit de diviser un cercle en vingt-quatre parties égales, de placer au centre, et bien perpendiculairement au plan du cadran, un style qui le percera de part en part, puis de marquer du n° 12 l'extrémité d'un des rayons. Ce rayon représente l'intersection du cadran avec le plan du méridien ; le chiffre 12 est tourné entre le style et le nord. Les points de division du côté de l'orient, et à partir du n° 12, prennent successivement les n°s 1,

Digitized by Google

2, 3, 4, 5, 6, etc.; ce sont les heures du soir; ceux de l'occident, à partir du même point, sont marqués 11, 10, 9, 8, 7, 6, etc.; ce sont les heures du matin. Il ne s'agit plus que de tracer une méridienne sur un plan parfaitement horizontal d'après les principes que nous avons donnés, et d'assujettir convenablement le cadran sur ce plan, c'est-à-dire de manière que *le style soit parallèle à l'axe terrestre*, et que le rayon 12 soit compris dans le plan du méridien; pour cela, on construit séparément un triangle rectangle dont un des deux angles aigus sera égal à la latitude du lieu; ce triangle est ensuite placé bien verticalement, l'hypothénuse sur la méridienne horizontale, et l'ouverture de l'angle de latitude tournée du côté du nord. On place alors le cadran bien perpendiculairement au plan de ce triangle, ces deux plans ayant pour intersection commune le rayon 12.

Ce que cette explication pourrait avoir d'obscur, deviendra très intelligible en exécutant le tracé.

Le cadran équinoxial, ainsi nommé, parce que le soleil se trouve dans son plan le jour de l'équinoxe, devra avoir deux faces, une supérieure, pour le temps où le soleil a une déclinaison boréale; l'autre inférieure, pour le temps des déclinaisons australes. Le style qui le traverse pourrait, avec quelques attentions, servir pour l'une et l'autre face. Si l'on voulait que ce cadran donnât les heures, les jours même des équinoxes, il faudrait munir sa circonférence d'un rebord ou anneau perpendiculaire qui recevrait l'ombre du style. Il est clair que si l'on voulait avoir les demi-heures, il suffirait de diviser le cercle en quarante-huit parties. En dessinant ce cadran sur une glace on s'épargne un des deux tracés.

CADRAN HORIZONTAL.

C'est le plus commun dans l'usage ordinaire, parce qu'on peut l'établir commodément sur une fenêtre, sur un pilier, dans un jardin, etc.

Digitized by Google

Après s'être assuré que le plan sur lequel on veut faire le cadran est parfaitement horizontal, on y tracera une méridienne C, XII *fig.* 31; par quelque point A de cette méridienne, on fera passer une perpendiculaire A S d'une longueur telle que C S, qui représente le style couché sur le cadran, fasse, avec A C, un angle S C A égal à la latitude du lieu. Du point S, on conduira une perpendiculaire S E à S C, qui ira rencontrer la méridienne C XII en E.

Par ce point E, on conduira une perpendiculaire indéfinie N E Q R à la méridienne. Prenant alors sur la méridienne, et à partir de E, une partie E S′ égale à E S, on décrira du point S′ comme centre une demi-circonférence qu'on divisera en douze parties égales. Par le centre S′ et les intersections I, i''', i'', i', etc., on conduira les droites S′ I, S′ i'', S′ i''; etc. qui, prolongées suffisamment, iront rencontrer N R, en R; r''', r'', ... n, n', n'', ... Par ces points et par C, origine du style, on tirera VII COR; C VIII; C IX qui iront se terminer au bord du cadran; ce sont les lignes horaires qu'on cherche. La ligne de six heures VI. VI ne rencontre point la ligne N R, elle est perpendiculaire à la méridienne au point C.

Si l'on voulait avoir les lignes horaires des demi-heures, ce ne sont point les lignes E r, rr', r' r'', etc., qu'il faudrait diviser en deux parties égales, mais bien les arcs E i, i i', i' i'', etc., qui donneraient, sur l'équinoxiale, des points d'intersection comme pour les heures.

Il est évident que le triangle C S A, que nous avons tracé dans le plan du cadran, devra être relevé perpendiculairement à ce plan; en faisant décrire au sommet S un quart de circonférence autour de A C comme charnière; toutes les conditions sont alors satisfaites.

On pourrait être embarrassé pour trouver le point R situé hors du cadran; si l'espace ne permettait point d'exécuter la construction de la *fig.* 31, on pourrait y suppléer par le calcul suivant qui exige

Digitized by Google

que le bord du cadran soit bien parallèle à la méridienne C XII. Les points P et Q étant donnés par le tracé, on connaît P Q, on le mesure ainsi que EC et ES'; en multipliant entre elles les deux premières quantités, et divisant le produit P Q × E C par E S', on a la valeur O Q qu'on porte de Q en O, on peut alors conduire C O. Nous ferons remarquer d'ailleurs que la partie orientale du cadran ne diffère en rien de la partie occidentale. On peut donc, à la rigueur, ne tracer que la partie comprise dans l'angle VI, C, XII. On prend ensuite E n=Er, E n' =Er', et ainsi de suite, ou mieux encore, si le cadran est bien rectangulaire, et si la méridienne le partage bien exactement en deux parties égales, on peut prendre sur les bords les parties XII, I=XII, XI. XII, II=XII, X, ou chacune à chacune X, IX=II, III. IX, VIII=III, IX.

On conçoit qu'il n'est point nécessaire de tracer ce cadran sur l'emplacement même qu'il doit occuper, rien n'empêche de le construire dans le cabinet sur une planche ou sur une ardoise; il suffit ensuite de l'orienter, c'est-à-dire de faire en sorte que la ligne C, XII, soit bien exactement placée dans le plan du méridien.

CADRANS VERTICAUX.

CADRAN MÉRIDIONAL.

C'est celui qui est tourné directement vers le sud. Il ne peut marquer que de six heures du matin à six heures du soir. La méthode de tracé ne diffère de celle du cadran horizontal (*fig.* 31), qu'en ce qu'on fait l'angle S C A égal au *complément* de la latitude du lieu. On trouve ce complément en retranchant la latitude donnée de 90°; ainsi pour Paris, par exemple, dont la latitude est de 48° 50′ (*Voy.* la table des latitudes), il faudrait faire S C A de 90° moins 48° 50′, c'est-à-dire de 41° 10′; de plus, l'intersection du méridien avec le cadran devant toujours être

Digitized by Google

C, XII, il faudra renverser les heures, c'est-à-dire mettre XI^h à la place de I^h, X^h pour II^h, IX^h pour III^h, et réciproquement. Le point XII marqué nord dans le cadran horizontal devient un des points inférieurs dans le cadran vertical; on voit donc qu'*un cadran vertical pour un lieu donné, n'est autre chose qu'un cadran horizontal tracé pour une latitude complémentaire.*

CADRAN ORIENTAL.

C'est celui qu'on trace sur le côté du méridien qui regarde directement l'orient; il ne peut donc marquer que jusqu'à midi exclusivement. Il n'y a point de méridienne à tracer. On tire (*fig.* 32) une droite AB bien parallèle à l'horizon, et une autre AK qui fasse, avec la première, un angle égal au complément de la latitude. Par un point quelconque D, on conduit une perpendiculaire 6, D, et à ce même point D, on plante bien perpendiculairement, au plan du cadran, un faux style de quelques pouces de hauteur, à l'extrémité duquel on fixe le vrai style en l'inclinant parallèlement à D, 6. Du point D comme centre, on décrit une circonférence qui se trouve ainsi divisée en quatre parts. On subdivise chaque quart en six parties, et par les points de division, on tire les droites D 4, D 5, D 7, D 8, etc., qui, par leur rencontre avec les parallèles 4, 11 qui limitent le cadran, donne la position des lignes horaires 11, 11. 10, 10. 9, 9. Il est facile de voir que ce cadran satisfait aux conditions que nous avons énoncées plus haut.

CADRAN OCCIDENTAL.

C'est celui qu'on trace sur le côté occidental du méridien. La méthode de tracé ne diffère en rien de celle du cadran oriental, seulement le cadran occidental ne marquant que depuis une heure jusqu'au coucher du soleil, ce sont les heures 1, 2, 3, 4, 5,

Digitized by Google

6, 7 qu'il faudra successivement mettre à la place de 11, 10, 9, 8, 7, etc.

CADRAN VERTICAL DÉCLINANT.

Un plan décline à l'est ou à l'ouest, lorsque l'ombre d'une verge perpendiculaire au plan, à l'heure de midi, tombe à droite ou à gauche de la verticale abaissée de son pied sur le plan.

En un point quelconque A du plan (*fig.* 33), on plantera une tringle métallique ou faux style.

Au moment précis de midi, qui sera donné par une méridienne horizontale tracée à côté, on marquera sur ce plan l'extrémité de l'ombre du faux style.

Par le point ainsi marqué, et au moyen d'un fil à plomb, on tracera sur le plan une ligne verticale, qui sera la méridienne du cadran.

Par le point A, on menera une parallèle A B à cette méridienne, et on lui donnera une longueur égale à celle du faux style.

Par ce même point A, on menera aussi une horizontale terminée en D, par la rencontre de la méridienne, et l'on joindra B D. L'angle en B sera la *déclinaison* du plan donné, ou la quantité angulaire dont il s'écarte du premier vertical. On appelle ainsi le plan qui passe par le zénith et les points d'est et ouest.

On prolongera l'horizontale A D au-delà de la méridienne, d'une quantité D B′ égale à D B; et au point B′, et au-dessus, l'on fera un angle égal à la latitude du lieu.

La droite qui fera cet angle avec D B′ ira rencontrer la méridienne en un point C, qui est celui où il faut planter le vrai style, en ayant toujours soin de l'incliner de manière qu'il s'appuie sur le bout du faux style.

On élevera encore en B′ une perpendiculaire à B′C, qui viendra couper la méridienne en un autre point M.

Digitized by Google

Par les points C et A, on fera passer une droite qui s'appelle, en gnomonique, la *soustylaire*, et par le point M on lui menera une perpendiculaire indéfinie, qui sera l'équinoxiale.

Du point M, et avec une ouverture de compas égale à MB′, on coupera le prolongement de CA en un point B″, et l'on joindra MB″.

Du point B″, et avec la plus courte distance de ce point à l'équinoxiale, on tracera une demi-circonférence, dont la base doit toujours être parallèle à cette équinoxiale.

On divisera cette demi-circonférence en arcs de quinze degrés, à compter du point où elle est coupée par MB″, et l'on fera passer, par tous les points de division, les rayons qu'on prolongera jusqu'à la rencontre de l'équinoxiale.

Enfin par ces derniers points, et par le point C, où le vrai style est fixé, on menera des droites qui seront les lignes des heures, et qu'il sera *facile* de numéroter convenablement. On aurait les lignes des demi-heures, en divisant en deux également les arcs de quinze degrés, et continuant comme on a dit plus haut.

Notre construction suppose que le plan donné est éclairé par le soleil à midi. Si cela n'était pas, voici ce qu'il faudrait faire.

1°. Par le moyen de la boussole, ou, ce qui vaut mieux, au moyen d'une méridienne horizontale tracée à peu de distance et prolongée jusqu'au plan, on déterminera la déclinaison de ce plan.

2°. En un point quelconque A du plan donné, on plantera le faux style perpendiculairement à ce plan.

3°. Par le même point A, on menera une verticale AB, qui doit être de la longueur du faux style, et au point B on fera un angle égal à la déclinaison trouvée, mais du côté vers lequel le plan décline. Le second côté de cet angle se terminera à l'horizontale AD.

4°. Par le point D qu'on vient de trouver, on menera sur le plan une verticale indéfinie, qui sera la méridienne du cadran.

Digitized by Google

5° On prolongera la ligne horizontale AD au-delà de la méridienne, d'une quantité DB′ égale à DB, et l'on continuera comme dans le cas précédent, avec cette différence que le point C, où le vrai style doit être implanté, se trouvera au-dessous de l'horizontale AB′; que ce style se dirigera de bas en haut, en passant toujours par l'extrémité du faux style, et que tout le reste de la construction se fera au-dessus du point A, au lieu de se faire au-dessous. Le problème est donc résolu dans les deux cas qu'il peut offrir.

N. B. Si l'on voulait marquer sur le cadran vertical déclinant quelques lignes horaires de plus que celles qui sont données par l'équinoxiale, on couperait la dernière de celles-ci par une droite parallèle à la ligne horaire, qui en est éloignée de six heures; et l'on prendrait sur cette parallèle l'intervalle entre la dernière ligne horaire et l'avant-dernière, pour le porter de l'autre côté de celle-là, ce qui donnerait un point de la ligne suivante, et ainsi des autres.

J'ai emprunté cette méthode à l'excellent ouvrage de M. Mollet.

Problème.

Déterminer la déclinaison d'un mur.

Il suffit, pour cela, d'appliquer horizontalement contre le mur le côté d'une boîte carrée de boussole, et d'examiner la direction que suit l'aiguille aimantée. Lorsqu'on sait de quelle quantité le méridien magnétique s'écarte du méridien du lieu, il est aisé de conclure la déclinaison du mur; car cette déclinaison, ou l'angle que fait le mur avec le premier vertical, est le complément de l'azimut, c'est-à-dire de l'angle donné par la boussole, corrigé comme nous venons de le dire, de la déclinaison de l'aiguille. A Paris, la pointe nord de l'aiguille aimantée s'éloigne vers l'occident de 22° 25′.

Les méthodes graphiques que nous avons données conduisent rarement, même avec la plus grande

Digitized by Google

adressée, à des résultats bien rigoureux : on fera toujours mieux, lorsqu'on voudra une grande exactitude, d'employer le calcul. Nous donnerons donc, comme nous l'avons fait jusqu'ici, c'est-à-dire sans aucune démonstration, les formules les plus nécessaires de la gnomonique.

CADRAN HORIZONTAL.

l étant la latitude du lieu, h l'angle horaire (15° pour 1 heure et 11 heures, 30° pour 2 heures et 10 heures, 22° $\frac{1}{2}$ pour 1 heure $\frac{1}{2}$ et 10 heures $\frac{1}{2}$), x l'angle de la ligne horaire avec la méridienne, on a

$$\text{Tang } x = \sin l \text{ tang } h.$$

Problème.

La latitude de Paris étant 48° 50′, on demande l'inclinaison de la ligne horaire de 10 heures ou 2 heures.

Tang x = sin l tang h devient = sin 48° 50′ × tang 30° ou log tang x = log sin 48° 50′ + log tang 30°

= log sin 48° 50°	1.876678 5
+ log tang 30°	1.761439 4
	1.638117 9

d'où x = l'angle horaire = 23° 29′ 32″.

C'est au moyen de cette formule qu'on a calculé les tables suivantes :

Angles que les lignes horaires d'un cadran horizontal pour la latitude de Paris font avec la méridienne.

Matin.	Soir.	Angles.
11h ½	12 ¼	2° 49′ 50″
11 ¼	12 ½	5. 39. 37
11 ¼	12 ¾	8. 31. 0
11	1	11. 24. 18

Digitized by Google

Matin.	Soir.	Angles.
10 1/4	1 1/4	14.20. 6
10 1/2	1 1/3	17.19.10
10 1/4	1 1/4	20.22. 4
10	2	23.29.32
9 1/4	2 1/4	26.42.14
9 1/2	2 1/3	30. 0.50
9 1/4	2 1/4	33.26. 1
9	3	36.58.26
8 1/4	3 1/4	40.38.40
8 1/2	3 1/3	34.27.14

Les autres lignes sont données par le tableau suivant :

Angles que les lignes horaires d'un cadran horizontal pour la latitude de Paris font avec la ligne de six heures.

Matin.	Soir.	Angles.
8h 1/4	3 1/4	41° 35′ 26″
8	4	39.29. 5
7 1/4	4 1/4	33.13.36
7 1/2	4 1/3	28.49.11
7 1/4	4 1/4	24.16.14
7	5	19.35.30
6 1/4	5 1/4	14.48. 1
6 1/2	5 1/3	9.55. 9
6 1/4	5 1/4	48.58.33

Ces derniers angles doivent être tracés des deux côtés de la ligne de 6 heures pour donner les heures avant 6 heures du matin, et après 6 heures du soir.

CADRAN VERTICAL DÉCLINANT.

l étant toujours la latitude, *h* un angle horaire quelconque, *a* l'azimut du mur ou l'angle qu'il fait avec le méridien, *s* l'angle de la soustylaire avec la méridienne, θ l'angle du style avec la soustylaire,

Digitized by Google

z l'angle d'une ligne horaire avec la soustylaire, on a (voyez *Uranographie de Francœur*)

$$\text{Tang } S = \cot l.\ \cos a$$

$$\sin \theta = \cos l.\ \sin a$$

Ces formules feront connaître la situation du style et de la soustylaire.

L'équation

$$\text{Tang } z = \sin \theta \text{ tang } (h - u)$$

fera connaître l'inclinaison des lignes horaires avec la soustylaire (h étant de 15° par heure), lorsqu'on aura u, qu'on obtient au moyen de l'équation auxiliaire

$$\text{Cot } u = \sin l.\ \text{tang } a$$

Si u est plus grand que h, $(h-u)$ devient négatif, et par suite tang z, c'est-à-dire que z doit être porté de l'autre côté de la soustylaire.

Problème.

Régler une montre au moyen d'un cadran solaire.

Une ligne méridienne, avec son style, ou un cadran solaire régulièrement tracé, peuvent servir à régler les montres, en ayant égard au défaut d'uniformité des retours du soleil au méridien dans diverses périodes de l'année. On sait qu'une montre ou une horloge bien réglée ne doit s'accorder avec le soleil que quatre fois par an, et que dans tous les autres jours elle doit avancer ou retarder sur les heures solaires, d'une manière fort irrégulière, parce qu'elle dépend de deux causes, qui tantôt tendent à se compenser, tantôt agissent en sens contraire. Cette quantité d'*avance* ou de *retard* dans un jour donné, se nomme l'*équation du temps*, et on la trouve indiquée dans les éphémérides, pour chaque jour de l'année, en minutes, secondes et dixièmes de seconde. Mais les montres ordinaires de poche, n'étant pas susceptibles de marcher aussi uniformé-

Digitized by Google

ment que les horloges, ou les garde-temps, on a pensé qu'il suffirait à la plupart des amateurs qui désirent régler leurs montres, c'est-à-dire, savoir de combien elles avancent ou retardent par jour sur le temps moyen ou uniforme, d'avoir une table, dans laquelle on trouverait l'indication des jours de l'année auxquels le temps moyen avance ou retarde sur le temps vrai ou solaire d'un nombre entier de minutes. On peut voir, en la consultant, que le 2 janvier la montre doit avancer de 4 minutes sur l'heure du soleil; que le 1er février elle doit avancer de 14 minutes, et se conserver ainsi jusqu'au 21 du même mois; de là avancer moins chaque jour, jusqu'au 16 avril, jour auquel elle doit s'accorder avec le soleil; puis retarder jusqu'à un maximum de 4 minutes seulement, qui tombe au 15 mai, et se retrouver d'accord avec le soleil vers le milieu de juin, *etc.* On peut remarquer que la plus grande différence entre les deux temps qui ait lieu dans toute l'année, répond à la fin d'octobre, et s'élève jusqu'à 16 minutes; et que dans le courant de décembre, la montre, qui le 1er de ce mois retardait de 11 minutes, doit avancer de 3 minutes le 31; ce qui fait une différence d'un quart d'heure dans ce mois, différence dont on accuserait la montre, tandis que c'est à la marche apparente du soleil qu'elle doit être réellement attribuée.

Il est aisé de comprendre que cette table d'*équation du temps*, étant bornée aux minutes, ne peut être à peu près exacte que jusqu'à ce degré, mais il est suffisant pour la très grande pluralité des montres ordinaires; pour les autres on aura recours aux tables complètes calculées pour tous les jours.

Digitized by Google

TABLE *des jours de l'année moyenne auxquels une montre réglée doit avancer ou retarder d'un nombre entier de minutes sur le midi du soleil.*

JOURS.		AVANCE. minutes.	JOURS.		RETARD. minutes.	JOURS.		RETARD. minutes.
Janvier.	2	4	Mai.	1	3	Octobre.	4	11
	4	5		15	4		7	12
	6	6		30	5		11	13
	8	7	Juin.	5	2		15	14
	11	8		11	1		20	15
	13	9		16	0		28	16
	16	10			avance			
	19	11		20	1	Novembre.	16	15
	22	12		25	2		21	14
	27	13		30	3		25	13
Février.	1	14	Juillet.	5	4		28	12
	21	14		11	5			
	28	13		22	6	Décembre.	1	11
Mars.	5	12	Août.	11	5		3	10
	9	11		16	4		6	9
	12	10		21	3		8	8
	16	9		25	2		10	7
	19	8		29	1		12	6
	23	7	Septembre.	1	0		14	5
	26	6			retard.		17	4
	29	5		4	1		19	3
Avril.	1	4		7	2		21	2
	5	3		10	3		23	1
	8	2		13	4		25	0
	12	1		16	5			
	16	0		19	6			avance
		retard		22	7		27	1
	20	1		24	8		29	2
	25	2		27	9		31	3
				30	10			

Digitized by Google

Pour compléter ces notions de gnomonique, nous donnerons, d'après l'annuaire du bureau des longitudes, la table des latitudes des principales villes; nous y laissons la longitude et leur plus courte distance à Paris, qu'il peut souvent être agréable de connaître.

Digitized by Google

TABLE

DES LONGITUDES ET DES LATITUDES DES PRINCIPALES VILLES DU GLOBE.

NOMS DES VILLES.	Longitude comptée de Paris.	LATITUDE.	Distance à Paris comptée en myriam.
Agen.....	1°43′ 40″O	44° 12′ 22″N	53,121
Alby.....	0.11.42 O	43.55.46 N	54,548
Ajaccio.	6.23.49 E	41.55. 1 N	91,600
Alep.....	34.50. 0 E	36.11.25 N	314,354
Alençon.....	2.14.53 O	48.25.48 N	17,120
Alexandrie...	27.35. 0 E	31.13. 5 N	302,648
Alger.....	0.44.40 E	36.48.36 N	133,769
Amiens.....	0. 2. 4 O	49.53.41 N	11,759
Amsterdam..	2.38. 0 E	52.22.17 N	43,179
Angers.....	2.53.15 O	47.28. 9 N	26,243
Angoulême..	2.10.59 O	45.38.57 N	39,056
Antongil. ...	48. 3.15 E	15.27.23 S	856,558
Arras.....	0.26.10 E	50.17.34 N	16,485
Aurillac.....	0. 6.25 E	44.55.41 N	43,439
Anvers.....	2. 3.55 E	51.13.16 N	30,323
Archangel...	38.23.15 E	64.31.40 N	284,872
Astrakan....	45.42.30 E	46.21.12 N	338,419
Athènes.....	21.25.59 E	37.58. 1 N	209,827
Auch.....	1.45. 4 O	43.38.39 N	59,249
Auxerre.....	1.14.57 E	47.47.57 N	14,715
Avignon. ...	2.28.15 E	43.57. 8 N	57,476
Bagdad.....	42. 4.30 E	33.19.40 N	385,889
Barcelone....	0.10.18 O	41.21.44 N	83,060
Bar-sur-Ornain.....	2.50. 0 E	48.46. 5 N	10,745
Batavia.	104.33.46 E	6.12. 0 S	1158,124

Digitized by Google

NOMS DES VILLES.	Longitude comptée de Paris.	LATITUDE.	Distance à Paris comptée en myriam.
Beauvais....	0° 15′ 15″O	49°26′ 7″N	6,890
Besançon....	3.42.30 E	47.13.45 N	32,834
Berlin.....	11. 2. 0 E	52.31.45 N	87,716
Blois.....	0.59.59 O	47.35.20 N	15,730
Bombay.....	70.18. 0 E	18.56.40 N	699,797
Bordeaux...	2.54.14 O	44.50.14 N	49,609
Boston.....	73.19. 0 O	42.22.11 N	552,087
Bourb.-Vendée	3.59.38 O	46.37.17 N	38,681
Bourg.....	2.53.30 E	46.12.26 N	36,385
Bourges.....	0. 3.42 E	47. 5. 4 N	19,470
Bremen.....	6.27.45 E	53. 4.38 N	65,260
Breslau.....	14.42. 3 E	51. 6.30 N	107,844
Brest.....	6.49. 0 O	48.23.14 N	50,307
Braxelles....	2. 2. 0 E	50.50.59 N	26,690
Buchos-Ayres	60.51.15 O	34 35.26 S	1104,550
Bukarest....	23.48. 0 E	44.26.45 N	187,140
Cadix.....	8.37.37 O	36.32. 0 N	153,562
Caen.....	2.41.53 O	49.11.12 N	20,645
Cahors	0.52.58 O	44.26.59 N	49,394
Caire (le)...	28.58. 0 E	30. 3.20 N	321,085
Calcuta.....	86. 9.30 E	22.34.45 N	786,051
Canton.....	110.42.30 E	23. 8. 9 N	947,885
Cap-Français.	74.38.10 O	19.46.20 N	724,914
Cap de Bonne-Espérance.	16. 3.45 E	33.55.15 S	933,196
Carcassonne..	0. 0.45 E	43.12.54 N	82,466
Carthagène..	77.50. 0 O	10.25.18 N	824,236
Cassel.....	7.15. 3 E	51.19.20 N	58,576
Cayenne....	54.35. 0 O	4.56.15 N	706,546
Châlons, Marne..	2. 1.46 E	48.57.16 N	14,890
Chanderna-gor.....	86. 9.15 E	22.51.26 N	783,803

Digitized by Google

NOMS DES VILLES.	Longitude comptée de Paris.	LATITUDE.	à compter en myriam.
Chartres....	0° 5o′ 55″ O	48° 26′ 54″ N	7,580
Chât.-Roux.	0. 38. 5o O	46. 48. 46 N	23,005
Chaumont...	2. 5o. 0 E	48. 6. 13 N	22,413
Cherbourg..	3. 57. 18 O	49. 38. 31 N	30,109
Clermont – Ferrand...	0. 45. 2 E	45. 46. 44 N	34,448
Colmar.....	5. 2. 11 E	48. 4. 44 N	38,049
Constantino – ple.....	26. 35. 0 E	41. 1. 27 N	224,942
Copenhague..	10. 14. 5 E	55. 41. 4 N	102,966
Cracovie....	17. 36. 54 E	5o. 3. 38 N	127,668
Dantzick....	16. 17. 45 E	54. 20. 48 N	127,643
Digne.....	3. 54. 4 E	44. 5. 18 N	60,605
Dijon.....	2. 41. 5o E	47. 19. 25 N	26,150
Douvres....	1. 1. 8 O	51. 7. 47 N	26,493
Draguignan..	4. 8. 18 E	43. 32. 18 N	66,964
Dresde.....	11. 22. 46 E	51. 2. 5o N	84,896
Dublin.....	8. 39. 0 O	53. 21. 11 N	78,400
Dunkerque..	0. 2. 22 E	51. 2. 9 N	24,430
Edimbourg..	5. 3o. 3o O	55. 57. 57 N	87,506
Epinal.....	4. 6. 57 E	48. 10. 33 N	31,171
Evreux.....	1. 10. 56 O	48. 55. 3o N	8,600
Florence....	8. 55. 3o E	43. 46. 41 N	88,514
Fort royal...	63. 26. 0 O	14. 35. 49 N	685,185
Foix.....	0. 43. 53 O	42. 57. 46 N	65,516
Foulpointe..	47. 33. 0 E	17. 40. 14 S	875,206
Francfort sur le Mein...	6. 15. 45 E	5o. 7. 29 N	47,402
Gap.....	3. 44. 47 E	44. 33. 37 N	55,418
Genève.....	3. 49. 15 E	46. 12. 0 N	40,966
Gênes.....	6. 37. 45 E	44. 25. 0 N	70,457
Gibraltar...	7. 3o. 46 O	36. 6. 3o N	154,551
Goa.....	71. 25. 0 E	15. 31′ 0 N	785,578

Digitized by Google

NOMS DES VILLES.	Longitude comptée de Paris.		LATITUDE.		Distance à Paris comptée en myriam.
Gorée (île)..	19° 45′ 0″	O	14° 40′ 10″	N	420,221
Gotha.....	8.23.45.	E	50.56. 8	N	64,423
Greenwich..	2.20.24	O	51.28.39	N	33,622
Grenoble....	3.23.24	E	45.11.42	N	47,923
Gueret	0.28.10	O	46.10.12	N	29,843
Basse-Terre..	64. 5.15	O	15.59.30	N	678,435
Hambourg..	7.38.22	E	53.32.51	N	74,548
Havane. (île de Cuba)..	84.43. 8	O	23. 9.27	N	771,164
Horn (cap de)	69.41.29	O	55.58.30	S	1330,485
Irkutek.....	101.51.15	E	52.16.41	N	657,244
Ispahan.....	49.30. 0	E	32.24.34	N	446,088
Jackson (port)	149.52. 0	E	33.51. 3	S	1702,560
Jakutsk.....	127.22.15	E	62. 1.50	N	683,060
Jérusalem...	33. 0. 0	E	31.47.47	N	333,562
Kasan.....	47. 0.45	E	55.47.51	N	321,836
Kœnigsberg..	18. 9. 0	E	54.42.12	N	140,225
Laon.....	1.17.12	E	49.33.54	N	12,355
La Rochelle.	3.29.55	O	46. 9.21	N	39,705
Laval.....	3. 6.38	O	48. 4.14	N	24,450
Le Mans....	2. 8.40	O	48. 0.30	N	18,300
Lille.....	0.44.16	E	50.37.50	N	20,623
Lima.....	79.27.45	O	12. 2.34	S	1025,056
Limoges.....	1. 4.52	O	45.49.53	N	34,372
Le Puy.....	1.33.21	E	45. 2 51	N	43,728
Lisbonne....	11.28.45	O	38.42.24	N	145,104
Londres (St-Paul).....	2.26. 2	O	51.30.49	N	34,862
Loms-le-Saulnier.....	3.13. 9	E	46.40.34	N	33,946
Lyon.....	2.29. 9	E	45.45.58	N	38,886
Macao.....	113.15. 0	E	22.12.44	N	969,389
Mâcon.....	2.29.53	E	46.18.27	N	33,747

Digitized by Google

NOMS DES VILLES.	Longitude comptée de Paris.	LATITUDE.	Distance à Paris comptée en myriam.
Madras.....	77° 56′ 15″ E	13° 4′ 8″ N	803,208
Madrid.....	6. 2. 0 O	40.24.57 N	104,947
Malaga.....	99.45. 0 E	2.10. 0 N	1052,853
Manille.....	118.38. 0 E	14.36. 0 N	1073,669
Marseille....	3. 2. 0 E	43.17.49 N	65,835
Mecque (la).	37.54.25 E	21.28. 9 N	451,538
Melun.....	0.19.23 E	48.32.23 N	4,066
Mende.....	1. 9.19 E	44.30.42 N	48,856
Metz.....	3.50.13 E	49. 7.10 N	28,157
Mexico.....	101.25.30 O	19.25.45 N	918,629
Mézières....	2.23.16 E	49.45.47 N	20,130
Milan.....	6.51.16 E	45.28. 2 N	63,987
Montauban.	0.59.30 O	44. 0.55 N	54,112
Montbrisson.	1.44 8 E	45.36.41 N	38,156
Montpellier.	1.32.30 E	43.36.16 N	59,332
Monterey....	124.11.21 O	36.35.45 N	902,941
Monte-Video.	58.34.45 O	34.54.48 S	1095,434
Mont-Marsan.....	2.49.55 O	43.54.42 N	85,865
Moskow.....	35.12.45 E	55.45.45 N	248,226
Moulins.....	0.59.59 E	46.34. 4 N	46,303
Munich.....	9.14.15 E	48. 8.20 N	68,425
Nancy.....	3.50.16 E	48.41.55 N	28,143
Nangasaki...	127.31.52 E	32.45.50 N	955,246
Nankin.....	116.27. 0 E	32. 4.40 N	903,247
Nantes.....	3.52.59 O	47.13. 6 N	33,992
Naples.....	11.55.30 E	40.50.15 N	129,036
Nevers.....	0.49.16 E	46.59.17 N	21,430
Niort.....	2.49.27 O	46.20. 8 N	34,931
Nismes.....	2. 1.30 E	43.50. 8 N	57,697
Nouvelle-Orléans.....	92.18.45 O	29.57.45 N	770,335
Odessa.....	28.25. 7 E	46 30.22 N	212,941

Digitized by Google

NOMS DES VILLES.	Longitude comptée de Paris.		LATITUDE.		Distance à Paris comptée en myriam.
Orléans.....	0° 25′ 34″	O	47° 54′ 12″	N	10,850
Oxford.....	3.35.37	O	51.45.40	N	41,298
Owhyée.....	158.19. 0	O	20. 7. 0	N	1202,480
Palerme.....	11. 1.45	E	38. 6.44	N	148,350
Palme.....	0.19. 0	E	39.34. 4	N	103,019
Paris.....	0. 0. 0		48.50.13	N	060,000
Pau.....	2.42.48	O	43.19. 1	N	64,791
Pékin.....	114. 7.30	E	39.54.13	N	821,607
Périgueux...	1.36.41	O	45.11. 8	N	42,362
Perpignan...	0.33.54	E	42.42. 3	N	68,320
Pétersbourg.	23.58.30	E	59.56.23	N	216,443
Poiladelphie.	77.31.45	O	39.56.55	N	590,392
Poitiers.....	1.59.32	O	46.35. 0	N	29,130
Pondichéri..	77.31.30	E	11.55.41	N	809,553
Port Louis..	55. 8.15	E	20. 9.45	S	940,263
Porto-Ferajo.	7.59.20	E	42.49. 6	N	90,994
Porto-Rico..	68.33 30	O	18.29.10	N	690,742
Prague.....	12. 5. 0	E	50. 5.19	N	88,261
Privas.....	2.15.32	E	44.42.33	N	48,971
Québec.....	73.30. 0	O	46.47.30	N	526,809
Quimper....	6.26. 0	O	47.58.29	N	48,510
Quito.....	81. 5.30	O	0.13.17	S	936,862
Rennes.....	4. 1. 2	O	48. 6.50	N	30,651
Riga.....	21.47 30	E	56.57. 1	N	170,526
Rio-Janeiro..	45. 5. 0	O	22.54.10	S	913,714
Rodez.....	0.14.14	E	44.21. 8	N	49,861
Rome.....	10. 9.32	E	41.53.54	N	110,422
Rouen.....	1.14.16	O	49.26.27	N	11,230
Saint-Brieux.	5. 4.10	O	48.31. 2	N	37,356
Saint-Denis.	53.10. 0	E	20.51.43	S	935,836
Saint-Joseph.	112. 1. 8	O	23. 3.13	N	956,840
Saint-Lo....	3.25.53	O	49. 6.57	N	25,213

Digitized by Google

NOMS DES VILLES.	Longitude comptée de Paris.	LATITUDE.	Distance à Paris comptée en myriam.
Ste-Hélène..	8° 9′ 0″O	15° 55′ 0″S	723,917
Sainte-Croix.	67. 8.44 O	17.44. 8 N	686,470
Siam.....	98.30. 0 E	14.20.40 N	941,181
Smolensk...	29.40. 0 E	54.51. 0 N	212,461
Smyrne.....	24.46.33 E	38.28. 7 N	228,569
Stockholm..	15.43.15 E	59.20.31 N	154,530
Stralsund...	11.12. 0 E	54.19. 0 N	98,236
Strasbourg..	5.24.36 E	48.34.56 N	39,753
Stuttgardt..	6.50.45 E	48.46.15 N	50,096
Syène.....	30.34.19 E	24. 5.23 N	382,759
Taïti.....	151.50.30 O	17.29.17 S	1569,273
Tarbes.....	2.16. 1 O	43.13.52 N	64,687
Ténériffe (pic de).....	19. 0. 0 O	28.17. 0 N	280,093
Thèbes.....	30.19. 6 E	25.43. 0 N	366,774
Tobolsk.....	64.46. 0 E	58.11.42 N	428,214
Torneo.....	21.52. 0 E	65.50.50 N	227,407
Toulon.....	3.35.26 E	43. 7. 9 N	69,299
Toulouse....	0.53.45 O	43.35.46 N	58,641
Tours.....	1.38.37 O	47.23.46 N	120,125
Trébisonde..	37. 7.45 E	41. 2.41 N	301,225
Trieste.....	11.26.53 E	45.38. 8 N	93,284
Trinquemalay.....	78.5[illegible]. 0 E	8.32. 0 N	847,412
Troyes.....	1.44.34 E	48.18. 5 N	14,128
Tripoli.....	10.51.18 E	32.53.40 N	198,771
Tulles.....	0.33.58 E	45.16. 3 N	39,893
Tunis.....	7.51. 0 E	36.47.59 N	148,069
Turin.....	5.20. 0 E	45. 4. 0 N	58,206
Uranisbourg.	10.22.44 E	55.54.38 N	105,298
Valence.....	2.33.10 E	44.55.59 N	47,502
Vannes.....	2. 5.19 O	47.39.26 N	39,862

Digitized by Google

NOMS DES VILLES.	Longitude comptée de Paris.	LATITUDE.	Distance à Paris comptée en myriam.
Varsovie....	18° 42′ 30″ E	52° 14′ 28″ N	136,982
Venise.....	10. 0.44 E	45.25.53 N	84,522
Versailles...	0.12.53 O	48.48.21 N	1,615
Vesoul	3.49.39 E	47.37.50 N	31,332
Vienne.....	14. 2.30 E	48.12.40 N	103,419
Vilna.....	22.57.45 E	54.41. 2 N	169,784
Washington.	79.19. 0 O	38.55. 0 N	615,540
Wardhuus..	28.46.45 E	70.22.36 N	282,926

La dernière colonne, ayant pour titre *Distance à Paris comptée en myriamètres*, a été calculée en supposant la terre sphérique, et en ne négligeant que les quantités plus petites que les millièmes de myriamètre.

Si l'on veut réduire ces distances en lieues géographiques de vingt-cinq au degré ancien, il faut multiplier les myriamètres par $\frac{9}{4}$, ou par 2 et un quart.

EXEMPLE. La distance de Paris à	myr.
Vienne est de.....	103,42
Ajoutez ce nombre à lui-même....	103,42
Ajoutez encore le quart.....	25,85
Somme.....	232,69

La somme de ces trois quantités est égale à la plus courte distance de Paris à Vienne, exprimée en lieues et fractions décimales de la lieue.

Digitized by Google

NOTIONS

DE LEVÉ DES PLANS

ET DE NIVELLEMENT.

La géodésie est la science qui a pour but de faire connaître les positions et les distances respectives des différens points de la surface du globe. Nous ne nous proposons point de réunir dans ce chapitre les élémens d'une science aussi étendue, et qui exige des connaissances en astronomie et en physique, que nous ne pouvons point supposer chez la plupart de nos lecteurs; nous nous bornerons à rappeler les formules les plus utiles dans le levé des plans un peu étendus, de six à huit mille arpens, par exemple; ce sera pour nos jeunes lecteurs une occasion d'employer quelques unes des formules de trigonométrie du dictionnaire, et de se former ainsi à des calculs dont il est très important d'acquérir l'habitude.

Former le canevas d'une carte, c'est déterminer les positions respectives des principaux lieux d'un pays. On y parvient en considérant ces lieux comme liés entre eux trois à trois par des lignes imaginaires qui forment ainsi des triangles dont ils occupent les sommets; et cette série de triangles, dont on couvre ainsi toute la surface d'un pays, prend le nom de réseau trigonométrique.

On démontre que ces triangles réunissent les conditions les plus avantageuses lorsqu'ils sont les plus grands possibles, et qu'ils approchent plus d'être équilatéraux.

On relève tous les angles de ces triangles, et on mesure un des côtés au moins de l'un d'eux: on a dès-lors tous les élémens nécessaires pour calculer

Digitized by Google

les distances entre les sommets ; car lorsque, dans un triangle, on connaît trois des six choses qui les constituent, pourvu toutefois que, parmi ces trois choses, il se trouve un côté, la trigonométrie enseigne à trouver les trois autres.

Ainsi donc, si (*fig.* 31) nous connaissons le côté G H du triangle G H F, nous connaîtrons bientôt toutes les parties de ce triangle, et par conséquent la longueur du côté F G ; prenant à son tour ce côté F G pour *base*, nous résoudrons encore le triangle G F E, et nous aurons F E, qui nous servira pour connaître C F E, et ainsi de suite jusqu'au dernier. On vérifie de temps en temps les opérations, en mesurant directement un des côtés, A B, par exemple, et si le calcul est d'accord avec l'observation, ou s'il en diffère peu, l'opération a été bien faite. Dans l'opération dirigée par Delambre et Méchain pour la mesure d'un arc du méridien, on trouva qu'à *Perpignan* la base calculée d'après celle de *Melun* différait de 10 pouces de la base effectivement mesurée. Ces 10 pouces étaient la résultante de toutes les erreurs commises dans les mesures des bases, dans les angles et les calculs des *soixante* triangles qui joignaient ensemble ces deux bases.

La première opération sera donc la *mesure de la base*.

On passera de là à la mesure des angles ; mais comme il est rare qu'on puisse se placer au point mathématique choisi pour sommet de l'angle, l'angle observé a besoin d'une correction connue sous le nom de *réduction au centre* ; de plus, comme il est fort rare aussi que les angles observés soient déterminés par des points parfaitement de niveau, ces angles observés étant inclinés à l'horizon, il faut les y réduire. On connaît cette opération sous le nom de *réduction à l'horizon*.

Nous allons donner les moyens de faire ces divers calculs ; mais comme il pourra arriver que nous nous servions indifféremment de la division du cercle en 400 grades ou en 360 degrés, nous allons

Digitized by Google

indiquer d'abord le moyen de convertir les degrés en grades, et réciproquement.

Problème.

Réduire les degrés en grades, et réciproquement.

Pour réduire les degrés ° en grades ᵍ, il faudra multiplier 1°1111 par le nombre de degrés, et réciproquement, multiplier 0°9 par le nombre de grades pour les convertir en degrés.

Application.

On propose de convertir un angle de 67° 53′ 43″ 378 en grades; multipliant 1°1111 par 67° 53′ 43″ 378, on trouvera, en prenant un assez grand nombre de chiffres décimaux 75ᵍ4393.

Réciproquement multipliant 0°9 par 75ᵍ4393, on retrouvera 67° 53′ 43″351 à très peu de chose près le précédent.

On parviendra encore au même résultat de cette manière :

Soit encore l'angle de 67° 53′ 43″,378, ayant converti les minutes et secondes en décimales,

On a.....	67°8954
On ajoute le neuvième ou.....	7.5439
On trouve comme ci-dessus.....	75ᵍ4393

Réciproquement pour convertir 75ᵍ4393 en degrés,

De.....	75ᵍ4393
On ôte le dixième ou.....	7.5439
Il reste.....	67°8953

Convertissant les décimales en minutes, secondes et parties de seconde, on trouvera 67° 53′ 43″ 332, moins juste que le précédent, mais suffisant pour la pratique.

Digitized by Google

RÉDUCTION AU CENTRE DE LA STATION.

L'observateur aurait dû se placer au point C (*fig.* 32), centre de la station ; mais il a été obligé de se placer en O, d'où il a observé A O B. Il s'agit d'obtenir A C B au moyen de A O B.

Soit A C B = C, A O B = O, O C = R.
La distance A C de l'objet à droite = D.
Celle B C de l'objet à gauche = G.
L'angle B O C entre l'objet à gauche et la direction au centre = y, on a

$$C - O = \frac{r \sin (O + y)}{D} - \frac{r \sin y}{G}$$

Pour que cette expression donne des secondes, il faut multiplier les deux termes du second membre par le nombre R″ qui exprime le nombre de secondes contenues dans un arc dont la longueur est égale à celle de son rayon (Voyez le Dictionnaire au mot *Arc*). Ce nombre est, pour l'ancienne division 57° 17′ 44″ 8 = 206264″ 8 dont le logarithme est 5. 3144251 ; dans la nouvelle division R″ = 63° 66197 = 636619″ 7 dont le log est 5.8038801.

La formule devient

$$C - O = R'' \frac{r \sin (O + y)}{D} - \frac{R'' r \sin y}{G}$$

Il suffit, pour en faire usage, d'avoir égard aux signes de sin (O + y) et de sin y.

Ainsi le premier terme de la réduction sera additif tant que O + y sera moindre que deux droits ; il sera soustractif au contraire si O + y est plus grand que deux droits ; le second terme sera soustractif tant que y sera plus petit que deux droits, et additif quand y surpassera deux droits.

Digitized by Google

Application.

Soit $O = 48^c.756$ $\quad \gamma = 294^c$,
$r = 3^m.257$, $D = 17500^m$, $G = 20300^m$

on aura

	1er terme de la correction,	2me terme.
$\log R''$	$= 5.80388$	
$\log r$	$= 0.51282$	
	$+ 6.31670$	$- 6.31670$
$\log \sin (O + \gamma)$	$- 9.89310$	$\log \sin \gamma - 9.99807$
comp. $\log D$	5.75696	comp. $\log G - 5.69250$
	$- 1.96676$	$+ 2.09727$

Nombres qui répondent à

$- 92''.6$ et $+ 101'', 7$

2me terme.....	$+ 101''.7$
1er terme.....	$- 92''.6$
La réduction est.....	$+ 9''.1$
Mais l'angle observé est.....	$48^c.7560$
Donc, l'angle réduit au centre $=$	$48^c.7569''.1$

RÉDUCTION A L'HORIZON.

Deux objets A.B (*fig.* 33) sont tellement situés à l'égard du point C, que l'un se trouve au-dessus de l'horizon CD de la quantité AD perpendiculaire à CD, et l'autre au-dessous de l'horizon CE de la quantité EB perpendiculaire à CE, on demande la projection de ACB sur DCE.

Soit cette projection $= O$ faisant le rayon $= 1$, l'angle observé $ACB = a$, la distance de l'objet B au zénith $= b$, la distance de l'objet A au zénith $= c$, on a

$$\sin \tfrac{1}{2} O = \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2} [a + (b - c)] \sin \tfrac{1}{2} [a - (b - c)]}{\sin b . \sin c}}$$

Digitized by Google

Application.

Soit $a = 61° 9' 27''3$
$b = 91.32.45.$
$c = 91.25.51.$
on aura

$$b - c = 0.\ 6'\ 54''$$
$$a + (b - c) = 61.16.21.3$$
$$a - (b - c) = 61.\ 2.33.3$$
$$\tfrac{1}{2}[a + (b - c)] = 30.38.10.65$$
$$\tfrac{1}{2}[a - (b - c)] = 30.31.16.65$$

log sin $\frac{1}{2}[a + (b - c)]$	9.7072179
log sin $\frac{1}{2}[a - (b - c)]$	9.7057427
comp. log sin b	0.0001581
comp. log sin c	0.0001356
log $(\sin \frac{1}{2} O)^2$	19.4132543
log sin $\frac{1}{2} O$	9.7066271

Qui répond à 30° 35′ 24″ 9; donc l'angle ICH réduit à l'horizon = DCB = 61° 10′ 49″ 18.

Au lieu de former le canevas d'un plan comme nous l'avons indiqué, on peut encore procéder de la manière suivante, lorsque des extrémités d'une base qu'on mesure d'abord avec soin, on peut apercevoir les principaux points qu'il s'agit de déterminer, soit par exemple (*fig.* 34) A.B cette base, C.D.E.F... ces points; il est clair que si du point B, par exemple, on relève les angles ABC, ABD, ABE, ABF, et que, se transportant à l'autre extrémité de la base, en A, on fait la même opération pour CAB, DAB, EAB, BAF, on aura tous les élémens nécessaires pour déterminer les points principaux, puisqu'ils sont les sommets de triangles dont on connaîtra toujours un côté et les deux angles adjacens.

Exemple.

Soit la base AB de 2500 mètres, FAB = 83° 1′, et ABF = 51° 40′; il en résulte que BFA = 45° 19′.

Digitized by Google

Or la formule du Dictionnaire (au mot *Trigonométrie*) indique le calcul suivant :

$$\log FA = \log 2500^m + \log \sin 51° 40' - \log \sin 45° 19'$$

$\log 2500^m$	$= 3.3979400$
$\log \sin 51° 40'$	$= 9.8945463$
compl. $\log \sin 45° 19'$	$= 0.1481279$

Otant une dixaine à la caractéristique à cause du complément, on a

$\log FA = 3.4406142$

qui répond à $2758^m.13$; c'est la distance cherchée.

Problème.

On demande la distance entre F et B, les données restant les mêmes, on a

$$\log FB = \log 2500^m + \log \sin 83° 1' - \log \sin 45° 19'$$

$\log 2500$	$= 3.3979400$
$\log \sin 83° 1'$	$= 9.9967662$
complément arithmétique $\log \sin 45° 16'$	$= 0.1481279$

Otant une dixaine à la caractéristique à cause du complément, on a

$\log FB = 3.5428341$

qui répond à $3490^m.07$.

S'il s'agissait de déterminer le point G formant avec AB un angle trop obtus pour pouvoir obtenir beaucoup d'exactitude dans les résultats, ou si ce point était invisible de A, la résolution du triangle ABC donnerait BC ; du point B on relèverait CBG, et l'on se transporterait en C pour relever GCB ; BC serait alors la nouvelle base, et pourrait servir pour déterminer par les mêmes moyens les points H.I., etc.

Digitized by Google

Application.

Si les élémens du triangle étaient, par exemple,

Angles	le côté connu.....	3490m107
48°49′	on trouverait pour	
31.33	les deux autres.....	2664. 22
99.38	et.....	1852. 27
180°		

Nous donnons ici une autre application au moyen de laquelle on pourra s'exercer au calcul de tous les cas des triangles rectilignes obliquangles en s'accordant alternativement les différens angles et les différens côtés.

Angles.	Côtés.
33°25′	1052.63
70.52	1805.77
75.43	1852.27
180. 0	

Comme lorsqu'on rapporte sur le papier la position des différens points, on éprouve beaucoup de difficulté, lorsque les angles sont fort aigus, à obtenir des intersections bien nettes; comme il arrive aussi que la position d'un point dépendant quelquefois de celle de deux autres déjà placés, la petite erreur commise sur le lieu des points primitifs influe d'une manière sensible sur la place des points subséquens, les géographes préfèrent souvent fixer ces points à l'aide de leurs distances à deux axes rectangulaires pris dans le plan; mais afin que la carte soit orientée, il est naturel de prendre pour axe vertical la méridienne passant par le lieu le plus important du pays; nous devons donc ici trouver la méridienne, quelle que soit la méthode qu'on emploie pour fixer sur le papier les points du terrain; cette recherche nous est d'ailleurs nécessaire pour *orienter*

Digitized by Google

le plan : il est évident, en effet, que lorsqu'on connaît l'angle formé par une de ses lignes principales avec le méridien terrestre, on peut assigner la place que les objets occupent à l'égard des quatre points cardinaux.

Problème.

Trouver la direction de la méridienne.

Pour avoir la direction de la méridienne assez exactement, il suffit, pendant une belle nuit, d'aligner l'étoile polaire au moment où elle se trouve dans le même plan vertical que la première étoile de la queue de la grande ourse. On laisse la lunette dans cette direction, et lorsqu'il fait jour, on fait mettre un signal au loin; et suivant l'axe de la lunette ramenée à l'horizon. L'angle formé par cette direction, et l'une des lignes du plan, est l'azimut de cette ligne. Cela posé, voici comment on parvient à déterminer la distance des principaux points à la méridienne et à sa perpendiculaire, ou les coordonnées x y de ces points.

Soit (*fig.* 35) MM′ la méridienne, PP′ la perpendiculaire; en supposant ces lignes indéfinies, le plan se trouve partagé en quatre parties, et comme, lorsqu'on enregistre les distances à la méridienne et à la perpendiculaire, il importe d'indiquer dans quel sens elles doivent être prises, il est nécessaire de donner aux coordonnées, des signes qui les fassent connaître immédiatement. On peut adopter les conventions établies dans la théorie des courbes; alors les signes sont donnés par le tableau suivant :

Dans l'angle MAP′,	on a	$+x+y$.
Dans P′AM,		$+x-y$.
Dans MAP		$-x+y$.
Dans M′AP		$-x.-y$.

Il est évident d'ailleurs que si des points S. S′ S″ on abaisse des perpendiculaires Sq; SQ. $S'q'$, SQ, $S''q''$; S″Q″ sur la méridienne et sur la perpendiculaire, on connaîtra les coordonnées x et y de ces

Digitized by Google

points en résolvant les triangles rectangles dont on connaît les hypothénuses, qui ne sont autre chose que les côtés du triangle, et un des angles aigus qu'on déduit de l'azimut observé.

Problème.

Connaissant deux angles contigus compris entre trois objets donnés de position, déterminer la station d'où l'on observe.

On peut souvent substituer au calcul nécessaire pour déterminer ainsi la station, un procédé graphique également sûr et prompt, au moyen d'un instrument assez simple, composé d'un demi-cercle gradué, muni de trois rayons qui se prolongent d'environ dix-huit pouces en dehors de la circonférence, en forme de règles à biseau. L'une de ces règles est le diamètre prolongé; elle est fixe. Les deux autres sont mobiles autour du centre, marqué par une légère entaille, et elles portent chacune une languette qui s'applique contre le bord du cercle divisé, et qui est munie d'un vernier.

Lorsqu'on a observé avec le cercle de réflexion, ou tel autre instrument approprié, deux angles entre trois objets (déjà placés sur le canevas), que nous nommerons A. B. C; appelant A la règle fixe, où le diamètre prolongé du demi-cercle, on fait mouvoir circulairement la règle B jusqu'à ce que son vernier réponde à l'angle observé entre les points A et B, puis on ajuste de même la règle C, de manière qu'elle fasse avec B l'angle observé entre B et C. On arrête alors les deux règles mobiles, chacune à sa place, par sa vis de pression, puis on promène sur le canevas le système angulaire ainsi préparé, jusqu'à ce que les trois biseaux des règles rasent exactement les trois A. B. C. du canevas. Alors on est sûr que le centre du cercle indiqué par l'entaille répond au point d'où l'on a observé ces mêmes angles, et on le marque sur le canevas.

Digitized by Google

NIVELLEMENT.

Deux points sont de niveau lorsqu'ils sont également éloignés du centre de la terre, et le nivellement est l'art de déterminer de combien un objet est plus éloigné qu'un autre de ce centre. Nous ne pouvons, dans un ouvrage de ce genre, donner la description des instrumens employés dans le nivellement; présenter ou plutôt rappeler les moyens de calcul, tel est notre but.

On nomme ligne de niveau apparent le rayon visuel horizontal, et ligne de niveau vrai toute courbe parallèle à la surface de la terre. Ainsi (*fig.* 36) A B est une ligne de niveau apparent, A D une ligne de niveau vrai.

Soit A B $= a$, B D ou la différence du niveau vrai au niveau apparent $= h$; soit C D $=$ R le rayon de la terre, on a sensiblement

$$h = \frac{a^2}{2R}$$

or 2 R $=$ 12,732,396 mètres, log. 7.1049101; mais la réfraction élevant le plus souvent les objets, il est nécessaire d'en tenir compte; c'est-à-dire qu'il faut abaisser d'une certaine quantité le point de vue apparent pour connaître la hauteur du point vrai de niveau apparent.

Digitized by Google

TABLE

Des Hauteurs du Niveau apparent au-dessus du Niveau vrai, et des Abaissemens causés par la Réfraction, depuis la distance de 20 *mètres jusqu'à celle de* 10000.

DISTANCE EN MÈTRES.	ÉLÉVATION du niveau apparent au-dessus du niveau vrai.	Abaissement causé par la Réfraction.	Excès de l'élévation du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, sur l'abaissement causé par la réfraction.
mt	mt	mt	mt
0	0,0000	0,0000	0,0000
20	0,0000	0,0000	0,0000
40	0,0001	0,0000	0,0001
60	0,0003	0,0000	0,0002
80	0,0005	0,0001	0,0004
100	0,0008	0,0001	0,0007
120	0,0011	0,0002	0,0009
140	0,0015	0,0002	0,0013
160	0,0020	0,0003	0,0017
180	0,0025	0,0004	0,0021
200	0,0031	0,0005	0,0026
220	0,0038	0,0006	0,0032
240	0,0045	0,0007	0,0038
260	0,0053	0,0008	0,0045
280	0,0062	0,0010	0,0052
300	0,0071	0,0011	0,0059
320	0,0080	0,0013	0,0067
340	0,0091	0,0014	0,0076

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

DISTANCE EN MÈTRES.	ÉLÉVATION du niveau apparent au-dessus du niveau vrai.	Abaissement causé par la Réfraction.	Excès de l'élévation du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, sur l'abaissement causé par la réfraction.
	mt	mt	mt
360	0,0102	0,0016	0,0085
380	0,0113	0,0018	0,0095
400	0,0126	0,0020	0,0106
420	0,0138	0,0022	0,0116
440	0,0152	0,0024	0,0128
460	0,0166	0,0027	0,0140
480	0,0181	0,0029	0,0152
500	0,0196	0,0031	0,0165
520	0,0212	0,0034	0,0178
540	0,0229	0,0037	0,0192
560	0,0246	0,0039	0,0207
580	0,0264	0,0042	0,0222
600	0,0283	0,0045	0,0237
620	0,0302	0,0048	0,0254
640	0,0322	0,0051	0,0270
660	0,0342	0,0055	0,0287
680	0,0363	0,0058	0,0305
700	0,0385	0,0062	0,0323
720	0,0407	0,0065	0,0342
740	0,0430	0,0069	0,0361
760	0,0454	0,0073	0,0381
780	0,0478	0,0076	0,0401
800	0,0503	0,0080	0,0422
820	0,0528	0,0084	0,0444
840	0,0554	0,0089	0,0465

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

DISTANCE EN MÈTRES.	ÉLÉVATION du niveau apparent au-dessus du niveau vrai.	Abaissement causé par la Réfraction.	Excès de l'élévation du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, sur l'abaissement causé par la réfraction.
	mt	mt	mt
860	0,0581	0,0093	0,0488
880	0,0608	0,0097	0,0511
900	0,0636	0,0102	0,0534
920	0,0665	0,0106	0,0558
940	0,0694	0,0111	0,0583
960	0,0724	0,0116	0,0608
980	0,0754	0,0121	0,0634
1000	0,0785	0,0126	0,0660
1020	0,0817	0,0131	0,0686
1040	0,0849	0,0136	0,0714
1060	0,0882	0,0141	0,0741
1080	0,0916	0,0147	0,0769
1100	0,0950	0,0152	0,0798
1120	0,0985	0,0158	0,0828
1140	0,1021	0,0163	0,0857
1160	0,1057	0,0169	0,0888
1180	0,1094	0,0175	0,0919
1200	0,1131	0,0181	0,0950
1220	0,1169	0,0187	0,0982
1240	0,1208	0,0193	0,1014
1260	0,1247	0,0199	0,1047
1280	0,1287	0,0206	0,1081
1300	0,1327	0,0212	0,1115
1320	0,1368	0,0219	0,1150
1340	0,1410	0,0226	0,1185

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

DISTANCE EN MÈTRES.	ÉLÉVATION du niveau apparent au-dessus du niveau vrai.	Abaissement causé par la Réfraction.	Excès de l'élévation du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, sur l'abaissement causé par la réfraction.
	mt	mt	mt
1360	0,1453	0,0232	0,1220
1380	0,1496	0,0239	0,1256
1400	0,1539	0,0246	0,1293
1420	0,1584	0,0253	0,1330
1440	0,1629	0,0261	0,1368
1460	0,1674	0,0268	0,1406
1480	0,1720	0,0275	0,1445
1500	0,1767	0,0283	0,1484
1520	0,1815	0,0290	0,1524
1540	0,1863	0,0298	0,1565
1560	0,1911	0,0306	0,1605
1580	0,1961	0,0314	0,1647
1600	0,2011	0,0322	0,1689
1620	0,2061	0,0330	0,1731
1640	0,2112	0,0338	0,1774
1660	0,2164	0,0346	0,1818
1680	0,2217	0,0355	0,1862
1700	0,2270	0,0363	0,1907
1720	0,2323	0,0372	0,1952
1740	0,2378	0,0380	0,1997
1760	0,2433	0,0389	0,2044
1780	0,2488	0,0398	0,2090
1800	0,2545	0,0407	0,2137
1820	0,2602	0,0416	0,2185
1840	0,2659	0,0425	0,2234

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

DISTANCE EN MÈTRES.	ÉLÉVATION du niveau apparent au-dessus du niveau vrai.	Abaissement causé par la Réfraction.	Excès de l'élévation du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, sur l'abaissement causé par la réfraction.
	mt	mt	mt
1860	0,2717	0,0435	0,2282
1880	0,2776	0,0444	0,2332
1900	0,2835	0,0454	0,2382
1920	0,2895	0,0463	0,2432
1940	0,2956	0,0473	0,2483
1960	0,3017	0,0483	0,2534
1980	0,3079	0,0493	0,2586
2000	0,3142	0,0503	0,2639
2100	0,3464	0,0554	0,2909
2200	0,3801	0,0608	0,3193
2300	0,4155	0,0665	0,3490
2400	0,4524	0,0724	0,3800
2500	0,4909	0,0785	0,4124
2600	0,5309	0,0849	0,4460
2700	0,5726	0,0916	0,4809
2800	0,6157	0,0985	0,5172
2900	0,6605	0,1057	0,5548
3000	0,7069	0,1131	0,5938
3100	0,7548	0,1208	0,6340
3200	0,8042	0,1287	0,6756
3300	0,8553	0,1368	0,7184
3400	0,9079	0,1453	0,7626
3500	0,9621	0,1539	0,8082
3600	1,0179	0,1629	0,8550
3700	1,0752	0,1720	0,9032

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

DISTANCE EN MÈTRES.	ÉLÉVATION du niveau apparent au-dessus du niveau vrai.	Abaissement causé par la Réfraction.	Excès de l'élévation du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, sur l'abaissement causé par la réfraction.
	mt	mt	mt
3800	1,1341	0,1815	0,9527
3900	1,1946	0,1911	1,0035
4000	1,2566	0,2011	1,0556
4100	1,3202	0,2112	1,1090
4200	1,3854	0,2217	1,1638
4300	1,4522	0,2323	1,2198
4400	1,5205	0,2433	1,2772
4500	1,5904	0,2545	1,3360
4600	1,6619	0,2659	1,3960
4700	1,7349	0,2776	1,4573
4800	1,8096	0,2895	1,5200
4900	1,8857	0,3017	1,5840
5000	1,9635	0,3142	1,6493
5100	2,0428	0,3268	1,7160
5200	2,1237	0,3398	1,7839
5300	2,2062	0,3530	1,8532
5400	2,2902	0,3664	1,9238
5500	2,3758	0,3801	1,9957
5600	2,4630	0,3941	2,0689
5700	2,5518	0,4083	2,1435
5800	2,6421	0,4227	2,2193
5900	2,7340	0,4374	2,2965
6000	2,8274	0,4524	2,3750
6100	2,9225	0,4676	2,4549
6200	3,0191	0,4830	2,5360

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

DISTANCE EN MÈTRES.	ÉLÉVATION du niveau apparent au-dessus du niveau vrai.	Abaissement causé par la Réfraction.	Excès de l'élévation du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, sur l'abaissement causé par la réfraction.
	mt	mt	mt
6300	3,1172	0,4988	2,6185
6400	3,2170	0,5147	2,7023
6500	3,3183	0,5309	2,7874
6600	3,4212	0,5474	2,8738
6700	3,5256	0,5641	2,9615
6800	3,6317	0,5811	3,0506
6900	3,7393	0,5983	3,1410
7000	3,8484	0,6157	3,2327
7100	3,9592	0,6335	3,3257
7200	4,0715	0,6514	3,4201
7300	4,1854	0,6697	3,5157
7400	4,3008	0,6881	3,6127
7500	4,4179	0,7069	3,7110
7600	4,5365	0,7258	3,8106
7700	4,6566	0,7451	3,9116
7800	4,7784	0,7645	4,0138
7900	4,9017	0,7843	4,1174
8000	5,0265	0,8042	4,2223
8100	5,1530	0,8245	4,3285
8200	5,2810	0,8450	4,4360
8300	5,4106	0,8657	4,5449
8400	5,5418	0,8867	4,6551
8500	5,6745	0,9079	4,7666
8600	5,8088	0,9294	4,8794
8700	5,9447	0,9511	4,9935

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

DISTANCE EN MÈTRES.	ÉLÉVATION du niveau apparent au-dessus du niveau vrai.	Abaissement causé par la Réfraction.	Excès de l'élévation du niveau apparent au-dessus du niveau vrai, sur l'abaissement causé par la réfraction.
	mt	mt	mt
8800	6,0821	0,9731	5,1090
8900	6,2211	0,9954	5,2258
9000	6,3617	1,0179	5,3438
9100	6,5039	1,0406	5,4123
9200	6,6476	1,0636	5,5840
9300	6,7929	1,0869	5,7060
9400	6,9398	1,1104	5,8294
9500	7,0882	1,1341	5,9541
9600	7,2382	1,1581	6,0801
9700	7,3898	1,1824	6,2074
9800	7,5430	1,2069	6,3361
9900	7,6977	1,2316	6,4661
10000	7,8540	1,2566	6,5973

Problème.

Trouver la différence du niveau de deux points situés à égale distance de l'instrument.

Il est évident que lorsqu'on pourra placer son niveau A (*fig.* 36) à des distances égales des points E B qu'on veut niveler, on ne tiendra compte ni de la réfraction, ni de la différence du niveau vrai au niveau apparent, car ces deux causes d'erreur se compensent; il suffira donc de soustraire la plus petite élévation de la mire, ou la plus petite cote

Digitized by Google

de la plus grande, le reste donnera la différence de niveau des points, c'est-à-dire fera connaître de combien le point auquel correspond la *plus grande* cote est *plus bas* que l'autre.

Problème.

Trouver la différence de niveau de deux points, en plaçant l'instrument à l'un des points extrêmes.

Soient ces deux points A et B (*fig.* 36) et soit placé l'instrument au point A, on retranchera de la cote correspondante au point B, la correction donnée par les tables pour la distance AB; et l'on soustraira la plus petite cote de la plus grande.

Exemple.

Soit la distance AB = 300 mètres, la hauteur de l'instrument en A = 1.054, la cote B 1.280, je cherche dans la quatrième colonne de la table le nombre correspondant à 300 mètres, je trouve 0.0059 que je retranche de 1.280; il reste 1.2741, je soustrais 1.054 de 1.2741, et il reste pour la différence de niveau des points A et B, la quantité de 0m.2201. Donc, le point A est plus élevé que le point B, d'environ 22 centimètres.

Problème.

Trouver la différence du niveau de deux points, ces points étant situés à des distances inégales de l'instrument.

Soient F et B les deux points, on retranchera d'abord la correction pour chaque distance donnée par la quatrième colonne de la table, puis soustrayant la plus petite cote de la plus grande, on aura la différence de niveau cherchée.

Exemple.

Soit FA = 100 mètres; AB = 200, soit la cote F = 1,66 et la cote B = 1.880.

Digitized by Google

La table donne 0.0007 et 0.0026, à retrancher des cotes correspondantes, elles deviennent donc $1.66 - 0.0007 = 1.6593$ et $1.880 - 0.0026 = 1,8774$.

Partant la différence de niveau est

$$1.8774 - 1.6593 = 0.2181;$$

c'est-à-dire que le point B est d'environ 22 centimètres plus bas que le point E.

Nous n'entrerons point dans de plus grands détails sur l'art du nivellement, dont la partie théorique est extrêmement simple; nous engageons ceux de nos lecteurs qui désireront acquérir des connaissances plus étendues, à consulter le *Traité de Topographie* de M. Puissant, et l'*Essai sur le Nivellement*, de M. Busson-d'Escars.

Connaissant la hauteur d'eau à laquelle on est élevé, déterminer sans instrument l'étendue de son horizon visuel, la terre étant supposée sphérique.

TH (*fig.* 37) étant cette hauteur, que nous nommerons h, la limite de l'horizon visuel est déterminée par le point P de contact de la tangente HP. On a donc à résoudre un triangle rectangle en P, dont on connaît l'hypothénuse CH = rayon de la terre $+ h$ et CP = rayon de la terre. Il suffit même, au moyen de ces données, de trouver la seule valeur de l'angle C, mesuré par l'arc TP; si l'on sait d'ailleurs que le degré terrestre équivaut à 111111, la minute à 1852, et la seconde 31 mètres;

$$\text{or } \cos C = \frac{R}{R + h}$$

Appliquons notre formule à divers exemples: on sait que M. Gay-Lussac, dans une ascension aérostatique qui avait pour but des expériences de physique, s'éleva jusqu'à 3600 toises, ou plus exactement 6980 mètres; on trouve par le calcul suivant l'étendue de son horizon visuel.

Le rayon moyen de la terre étant de

Digitized by Google

le log du rayon des tables est.... 10.0000000
$R = 6366198^m$ log..... 6.8038801
$h = 6980.$

$(R + h) = 6373178^m$ — log..... 6.8043561

log cos C.... 9.9995240

angle $C = 2° 40'.50'' = 297852$ mètres $= 67$ lieues environ de 25 au degré.

C'est aussi de cette distance qu'on aurait pu apercevoir le ballon qui le portait. Nous ferons remarquer qu'en ne tenant point compte de la réfraction qui élève les objets au-dessus de leur lieu réel, la mesure de *la dépression* QHP, prise avec un instrument, donne immédiatement, et avec une approximation suffisante, l'angle C, et par suite la longueur de l'arc TP, au moyen des valeurs de degrés, minutes, secondes, que nous avons données plus haut. Ceci devient évident, si l'on se rappelle que dans tout triangle rectangle les angles aigus sont compléméns l'un de l'autre.

On a donc PHC + PCH = 2 droits; mais HQ étant horizontale, elle est perpendiculaire à la verticale HTC. Par conséquent, QHP, ou la dépression, plus PHC = aussi 2 droits, d'où l'on conclut dépression = PCH.

La table suivante, extraite de l'*Uranographie* de M. Francœur, donne la distance en lieues par pieds d'élévation au-dessus du niveau de la mer; la dépression est corrigée de la réfraction.

Digitized by Google

PIEDS d'élévation	dépression.	DISTANCE en lieues.	PIEDS d'élévation	dépression.	DISTANCE en lieues.	PIEDS d'élévation	dépression.	DISTANCE en lieues.
1	1′ 1″	0.43	14	3′ 47″	1.58	40	6′ 24″	2.67
2	1 26	0.60	16	4 3	1.69	45	6 47	2.83
3	1 45	0.73	18	4 17	1.78	50	7 9	2.98
4	2 1	0.84	20	4 31	1.88	55	7 30	3.13
5	2 15	0.94	22	4 45	1.98	60	7 50	3.27
6	2 29	1.04	24	4 57	2.06	70	8 27	3.52
7	2 40	1.11	26	5 9	2.15	80	9 2	3.77
8	2 51	1.19	28	5 21	2.23	90	9 35	4.00
9	3 2	1.26	30	5 32	2.31	100	10 6	4.21
10	3 12	1.33	32	5 43	2.38	130	11 31	4.80
11	3 21	1.40	34	5 53	2.45	150	12 23	5.17
12	3 30	1.46	37	6 9	2.56	200	14 18	5.96
						300	17 30	7.31
						400	20 12	8.42
						500	22 35	9.42
						600	24 45	10.31
						800	28 35	11.91

Ces nombres servent à évaluer la distance d'un navire au rivage. La formule résout une foule de questions analogues. Nous donnons ici quelques valeurs de h, afin que le lecteur puisse s'exercer.

Le sommet du grand mât d'un vaisseau de 120 canons est élevé au-dessus du niveau de la mer d'environ 50^m.

Le Chimboraso, montagne du Pérou, de 6530^m.

Le Pic de Ténériffe, de 3710^m.

Le 14^e pic de l'Himalaya, la plus haute montagne du monde, 7821^m.

Digitized by Google

GÉOMÉTRIE PRATIQUE,

ET PROBLÈMES DIVERS.

MESURAGE DES BOIS.

Lorsqu'on met les bois en œuvre, on les équarrit d'abord; c'est-à-dire qu'on leur donne la forme d'un parallélipipède rectangle, et alors on entend par *équarrissage* le carré inscrit dans le cercle formé par la circonférence de l'arbre *en grume*; lorsque cet arbre diminue de grosseur, comme il arrive souvent, en allant du pied vers les branches, l'*équarrissage* s'évalue sur la circonférence *moyenne*, c'est-à-dire sur la section faite au milieu de la longueur.

Si d est le diamètre moyen, h la hauteur de l'arbre, v le volume de l'arbre équarri,

$$\frac{d^2}{2} = \text{équarrissage}$$

$$\text{et } v = \frac{d^2}{2} \times h$$

Si le bois était déjà équarri, et même si l'une des dimensions de l'équarrissage était beaucoup moins large que l'autre, on aurait

$$v = lbh$$

l étant la longueur de la pièce, h l'épaisseur dans le sens vertical, et b la largeur dans le sens horizontal.

Si l'on voulait connaître le poids p de cette pièce,

Digitized by Google

dont les dimensions ont été prises en *décimètres*, en nommant a le poids spécifique du bois (*voyez* la valeur de a pour les principaux bois dans la table suivante), on aurait en *kilogrammes*

$$p = a\,l\,b\,h = a\,v$$

Si l'unité de mesure était le centimètre au lieu du décimètre, cette expression donnerait le poids en grammes.

Table des valeurs de a, *pour*

Le cœur de chêne.....	$a = 1.170$
Noyer et orme.....	0.671
Noisetier et tilleul.....	0.604
Sapin.....	0.550
Hêtre.....	0.852
Peuplier.....	0.383
Poirier.....	0.661
Frêne.....	0.845
Aune.....	0.800
Cerisier.....	0.715

Problème.

Mesurer une pièce de bois de forme irrégulière: on se contente de prendre la moyenne arithmétique de ses dimensions; soit, par exemple, une pièce de bois qui aurait 12 mètres de longueur,

De largeur à un bout.....		80 cent.
Et d'épaisseur.....	35 cent.	
De largeur à une distance de 3 mètres.....		75
Et d'épaisseur.....	25	
De largeur à la moitié.....		65
Et d'épaisseur.....	20	
A trois mètres plus loin.....	15	60
A l'extrémité.....	10	50
La somme des dimensions est	105	et 330

Digitized by Google

On prend le cinquième, et l'on a

Largeur moyenne.....	66 centimètres
Épaisseur moyenne.....	21
Le produit de ces dimensions entre elles..... =	1386 centimètres
Multipliant par la longueur de la pièce ou.....	12 mètres
on trouve.....	166,32

ou un stère six cent soixante-trois millimètres deux dixièmes.

MESURER LE DIAMÈTRE INTÉRIEUR D'UN TUBE CAPILLAIRE.

1°. On pesera d'abord le tube vide, dont on connaît la longueur h en millimètres; 2°. on l'emplira de mercure, et on le pesera de nouveau; soit la différence des poids en grammes $= p$

le diamètre intérieur du tube $= 9.73571 \sqrt{\frac{p}{h}}$

Si l'on opérait par logarithmes, on aurait pour celui de 9.73571 ..... 0.9883677

La hauteur h est mesurée à la température 0; si la colonne de mercure était un peu longue, il serait plus exact de la réduire de son $\frac{1}{5550}$ pour chaque degré centigrade au-dessus de zéro.

PILES DE BOULETS.

Dans les parcs d'artillerie, on met en piles les boulets de canon, les bombes et le obus. Ces piles peuvent être, ou pyramidales à base carrée, ou pyramidales à base triangulaire, ou oblongues, ayant pour base un parallélogramme rectangle.

S étant le nombre total des boulets de la pile, n

Digitized by Google

celui de chaque arête latérale, qui est égale au nombre de tranches, on a pour la *pile pyramidale à base carrée*

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \times 2 \times 3}$$

Au moyen de cette formule on formerait le tableau suivant :

Arêtes.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Tranches.	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.	100.
Piles.	1.	5.	14.	30.	55.	91.	140.	204.	285.	385.

On aurait pour la *pile pyramidale à base triangulaire*

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

On pourra s'exercer au calcul de cette formule au moyen du tableau suivant :

Arêtes.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Tranches.	1.	3.	6.	10.	15.	21.	28.	36.	45.	55.
Piles.	1.	4.	10.	20.	35.	56.	84.	120.	165.	220.

Pour la *pile oblongue*, *dont la base est un rectangle*, soit m le nombre de boulets contenus dans la tranche supérieure, on a

$$S = \frac{n(n+1)(3m+2n-2)}{6}$$

En faisant $m = 10$, on formerait le tableau suivant :

Tranches.	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.
Valeur des tranches.	10.	22.	36.	52.	70.	90.	112.	136.	160.	190.
Piles.	10.	32.	68.	120.	190.	280.	392.	528.	690.	880.

Réciproquement, étant donnée S, on trouverait n dans les deux premières formules ; quant à la troi-

Digitized by Google

sième, connaissant deux des quantités, S, n ou m, on trouvera toujours l'autre.

JAUGEAGE.

Jauger un tonneau.

L, longueur du tonneau; d, diamètre du fond; D, diamètre du bouge, exprimé en la même unité linéaire; C, la capacité en unité cubique de la même espèce. On a

$$C = 0{,}0873 \times L \times (d + 2D)^2$$

Application.

Si le tonneau a 11 décimètres $\frac{4}{5}$ de longueur, les diamètres étant 9,7 et 8,8, la formule devient

$$C = 0{,}0873 \times 11{,}4 \times (8{,}8 + 2 \times 9{,}7)^2$$
$$= 0{,}0873 \times 11{,}4 \times (28{,}2)^2$$

Carré de 28,2, ...	795 24
Multiplié par 11,4, produit.....	9065.736
Le tout, multiplié par 0,0873...	791.44

791 litres $\frac{1}{2}$ à peu près.

Problème.

Jauger un tonneau en vidange.

On place le tonneau bien horizontalement, et l'on introduit par le bondon, et dans une direction perpendiculaire à l'axe, une sonde; la partie mouillée indiquera la hauteur du liquide, et la partie non mouillée fera connaître la hauteur du vide. Si le plein excède la moitié du tonneau, *la capacité du vide est égale au produit de la surface d'un cercle qui aurait pour diamètre une fois et demie la perpendiculaire menée du centre du bondon au plein, multipliée par la longueur intérieure du tonneau.* Dans le cas où le plan qui sépare le vide du plein serait à peu près à la hauteur des diamètres verticaux des fonds, on pourrait considérer ce vide

Digitized by Google

comme une portion d'ellipsoïde dont *le volume serait égal au produit de la longueur intérieure, par la surface d'un cercle qui aurait pour diamètre la distance du centre du bondon au plein, plus les deux tiers de cette hauteur, ou plus les trois quarts de cette hauteur, si le plan avait atteint cette extrémité.*

Problème.

On demande la quantité de litres nécessaire pour remplir un tonneau qui, couché horizontalement, présente les dimensions suivantes : diamètre du bouge, 88 centimètres; diamètre du fond, 76; longueur intérieure, 116; hauteur du plein, 60; celle du vide, par conséquent, =28 : ajoutez la moitié de la hauteur, qui est 14 à 28, vous aurez 42 centimètres. Cherchez dans le dictionnaire, à la fin du volume, au mot *cercle*, la circonférence d'un cercle qui aurait 42 centimètres de diamètre, vous trouverez 132; multipliez 132 par 10.5, quart du diamètre, vous aurez de surface 1386 centimètres carrés, qui, multipliés par la longueur du tonneau, ou 116, donneront pour résultat 160 litres.

Les dimensions des tonneaux ont été fixées par le gouvernement, telles qu'elles sont indiquées dans la table suivante, au moyen de laquelle on pourra s'exercer.

Digitized by Google

TABLE.

NOMS DES PIÈCES.	CONTENANS en litres.	LONGUEUR intérieure.	DIAMÈTRE intérieur du bouge.	DIAMÈTRE intérieur du fond.
		millim.	millim.	millim.
Demi-hectolitre.	50	454	389	345
Hectolitre.	100	572	490	435
Double hectolit.	200	720	618	548
	300	825	707	628
	400	908	778	691
Demi-kilolitre. .	500	978	838	745
	600	1039	891	791
	700	1093	938	833
	800	1144	980	871
	900	1190	1019	906
Kilolitre.	1000	1232	1056	938

TROUVER LA CAPACITÉ D'UN BROC.

On mesurerait le diamètre du fond et celui de l'ouverture : la demi-somme des deux diamètres serait le diamètre moyen des deux bouts. On mesurerait encore le diamètre du ventre, et l'on soustrairait le tiers de la circonférence qu'il y aurait entre ce diamètre et celui moyen des deux bouts ; les deux tiers restant, ajoutés à ce dernier, seraient le diamètre moyen du broc.

Ce diamètre une fois connu, on chercherait la circonférence pour avoir la surface, et par suite la solidité.

Digitized by Google

Application.

Soit proposé un broc dont la hauteur intérieure est de 325 millimètres, sur 220 de diamètre au fond, et 120 à l'ouverture.

On prend la moitié de 220 plus 120 = 340, et l'on a, pour le diamètre réduit des deux bouts, 170 millimètres. Si celui du ventre est 280, la différence entre celui-ci et celui réduit des deux bouts, est 280 — 170 = 110; de cette différence on retranchera le tiers, ou 36.66: il reste pour diamètre moyen 243.33, d'après lequel diamètre moyen on conclut que la circonférence de 764.75 produit en surface 46521.65 millimètres carrés, qui, multipliés par la hauteur, ou 325, donnent une capacité de 16 décimètres cubes, ou 16 litres.

Problème.

Trouver les dimensions que doivent avoir les caisses destinées à contenir une quantité donnée de bouteilles de liquides.

Soit, par exemple, une caisse destinée à contenir 50 bouteilles; on peut considérer le volume d'une bouteille, avec l'enveloppe nécessaire pour l'empêcher de toucher les autres bouteilles, comme égal à trois décimètres cubes, parce que la circonférence des bouteilles est communément de 30 à 35 centimètres, et leur hauteur, de 30 à 32 avec le bouchon; ainsi, en multipliant 50 par 3, on trouve qu'il faut une caisse de 150 décimètres cubes pour contenir 50 bouteilles. Or, une caisse qui aurait 40 centimètres de hauteur, 40 de largeur et 94 de longueur, formerait, à très peu plus, la capacité demandée.

Généralement on peut prendre, pour former la caisse, deux dimensions arbitraires, et pour trouver la troisième, diviser la solidité par le produit des deux premières dimensions.

Digitized by Google

Problème.

Mesurer la contenance d'un seau.

Un seau a la forme d'un cône tronqué : or, si l'on donne, par exemple, 2,9 décimètres au diamètre supérieur, et 2,3 au diamètre inférieur, la profondeur étant de 3 décimètres, et V′ le volume,

$$V = 0{,}2618\ h\left[(D+d)^2_\circ - D\,d\right]$$

se change en

$$V = 0{,}2618 \times 3 \times \left(\overset{2}{5.2} - 2{,}9 \times 2{,}3\right)$$

$\overset{2}{5.2} = \ldots$	27.04
$2.9 \times 2.3 = \ldots$	6.67
$\overset{2}{5.2} - 2{,}9 \times 2.3 = \ldots$	20.37
multiplié par 3 $= \ldots$	61.11

qui, multiplié par 0,2618, donnent 15,999, environ 16 litres.

PROBLÈMES DIVERS.

Il y a 32 cartes dans un jeu de piquet, et les cartes sont mêlées à chaque coup ; on demande si depuis le temps qu'on y joue, tous les arrangemens différens de ces 32 cartes n'ont pas été épuisés.

La formule générale (*voyez* le Dictionnaire)

$$(m\mathrm{P}p) = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots\times(m-p+1)$$

donne $(32.\mathrm{P}\,32) = 32\times31\times30\times29\ldots$

et ainsi de suite, jusqu'à 1 : nombre de permutations égal à

263,130,836,933,693,530,167,218,012,160,000,000.

Or, en supposant tous les individus de l'espèce humaine répandus sur la surface de la terre, sans distinction d'âge ni de sexe, devenus joueurs de piquet et appariés deux à deux, en sorte que chaque couple jouât 400 coups :

Digitized by Google

Par jour ou par an.....	146,000
Par siècle.....	14,600,000
Par millions de siècles...	14,600,000,000,000

En évaluant à deux mille millions la population de la terre entière, on aurait 1,000,000,000 de couple de joueurs, ce qui ne donnerait encore que 14,600,000,000,000,000,000 de coups, par million de siècles.

Si l'on voulait connaître combien de *millions de siècles* il faudrait à tous ces joueurs pour parvenir au but proposé, il faudrait diviser le nombre de permutations par le nombre de coups ci-dessus, on trouverait que *dix-huit mille milliards de millions de siècles ne suffiraient point.*

Problème.

Il y a un panier et cent cailloux rangés en ligne droite à des espaces égaux d'une toise. On propose de les ramasser et de les reporter dans le panier, un à un; en allant d'abord chercher le premier, puis le second, et ainsi de suite. Combien de toises fera celui qui entreprendra cet ouvrage?

Il est clair que, pour le premier caillou, il faudra faire deux toises, une pour aller, une pour revenir; il faudra en faire quatre pour le second, six pour le troisième, etc. Il est d'ailleurs facile d'apercevoir que ces nombres forment une progression par différence, dont le nombre des termes $n = 100$, le premier terme $a = 2$, et le dernier $u = 200$ la différence $d = 2$; la somme des termes S s'obtient par l'une des formules de notre tableau. Choisissons la plus simple :

$$S = \frac{(a + u)\,n}{2},$$

ce qui donne

$$S = \frac{(2 + 200) \times 100}{2} = \frac{20200}{2} = 10100 \text{ toises.}$$

Digitized by Google

On a vu, au Luxembourg, une personne parier qu'elle irait de ce palais au château de Meudon, toucher la grille d'entrée, et reviendrait au Luxembourg avant qu'une autre eût ramassé cent pierres espacées comme ci-dessus, et sous les mêmes conditions. La dernière, qui n'avait aucune connaissance mathématique, ne pouvant se persuader qu'une pareille entreprise exigeât tant de chemin, gagea une assez forte somme, et la perdit; car la première fut de retour, qu'elle était à peine à la 85me pierre.

Problème.

Un homme doit 1860 francs à un créancier qui veut bien lui permettre de s'acquitter en un an, sous les conditions, savoir, de lui payer le premier mois 100 francs, et ensuite, chaque mois, une somme de plus que le précédent, jusqu'au 12me, qui complétera le paiement. On demande de combien le paiement de chaque mois devra être augmenté.

On voit ici qu'il s'agit de trouver la différence d d'une progression dont on connaît le nombre des termes : $n = 12$ le premier, $a = 100$, et la somme des termes $S =$ le montant de la dette $= 1860$, or

$$d = \frac{2s - 2an}{n(n-1)} = \frac{2 \times 1860 - 2 \times 12 \times 100}{12 \times 11}$$

$$= \frac{3720 - 240}{132} = \frac{1320}{132} = 10f.$$

Il faudra donc augmenter chaque paiement de 10 fr.; le premier étant 100, le second sera 110, le troisième 120, etc.

Problème des échecs.

Ce problème si connu devait, à cause même de sa célébrité, trouver place ici; nous le donnerons donc tel à peu près que M. Ozanam le rapporte dans ses *Récréations*.

Digitized by Google

Un mathématicien de l'Inde, nommé Sessa, ayant inventé le jeu des échecs, le présenta au roi son maître, qui en fut si satisfait, qu'il voulut lui en donner une marque digne de sa magnificence. Il lui ordonna donc de demander la récompense qu'il désirait, lui promettant qu'elle lui serait accordée. Le mathématicien se borna à demander un grain de blé pour la première case de son échiquier, deux pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite, en doublant toujours jusqu'à la dernière ou soixante-quatrième case. Le prince s'indigna presque d'une demande qu'il jugeait répondre mal à sa libéralité, et ordonna à son visir de satisfaire Sessa : mais quel fut l'étonnement de ce ministre, lorsqu'ayant fait calculer la quantité de blé nécessaire pour remplir l'ordre de ce prince, il vit que non seulement il n'y avait pas assez de grains dans ses greniers, mais même dans tous ceux de ses sujets, et dans toute l'Asie. Il en rendit compte au roi, qui fit appeler le mathématicien, et lui dit qu'il reconnaissait n'être pas assez riche pour remplir sa demande, dont la subtilité l'étonnait encore plus que l'invention du jeu qu'il lui avait présenté. On voit qu'il s'agit ici de trouver la valeur S des termes $n = 64$ d'une progression par quotient, dont la raison est $q = 2$, et le premier terme $a = 1$

$$\text{or } S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1} = 2^{64} - 1$$

Il suffirait donc, pour avoir le nombre de grains de blé, d'élever 2 à la 64me puissance, et de retrancher 1 du résultat : c'est ici que l'emploi des logarithmes devient très avantageux : le logarithme de 2 est

0,30102,99956,63981,19521, qui, multiplié par 64, donne 19.26591,97224,94796,49344, qui répond à 18,446,744,073,709,551,616.

Digitized by Google

Telle est, si l'on en retranche une unité, la valeur de 8, ou la somme des grains demandés. Des curieux ont trouvé qu'il fallait environ 261,000 grains de blé pour former le poids d'un myriagramme (environ 20 liv.); l'inventeur aurait donc

70677180359040 myriagrammes;

et en évaluant ce poids à 2 fr., cela ferait

141,354,360,718,080 fr.

On a calculé aussi que les grains de blé pourraient couvrir, à un pied de hauteur, une étendue de pays environ trois fois et demie aussi grande que la surface de la France.

Problème.

Combien de signes différens pourrait-on former avec les 24 lettres de l'alphabet?

La formule du Dictionnaire donnera pour ce nombre

620,448,401,733,239,439,360,000.

Tous les hommes de la terre, réunis, ne parviendraient point, en *dix millions de siècles*, à écrire toutes ces permutations, en évaluant le travail par homme à 40 pages par jour, contenant chacune 40 permutations.

Problème.

Trois, ou un plus grand nombre de personnes, ayant pris chacune une carte, dont le nombre des points n'excède pas neuf, trouver les points de celle que chacun a prise.

Dites à la première d'ajouter 1 au double du nombre des points de sa carte, puis de multiplier la somme par 5, et au produit d'ajouter les points de la carte de la seconde; puis de doubler la somme, d'ajouter encore l'unité, de multiplier le total par 5, et d'ajouter à ce produit les points de la carte prise par la troisième personne: en ôtant de ce produit 55, si le nombre des personnes est 3, ou 555 si ce nom-

Digitized by Google

bre est 4, ou 5555 s'il y en a 5, etc., le reste indiquera par les chiffres qui le composeront les points des cartes prises par chaque personne, et dans le même ordre.

En effet, soient x, y, z, les nombres (moindres que 10) à deviner. Il faut ajouter 1 au double du premier, on a $2x+1$; le multiplier par 5, ce qui donne $10x+5$; y ajouter le second nombre, ce qui fait $10x+5y+5$; doubler cette somme et ajouter 1, ce qui fait $20x+2y+11$: multipliant par 5, et ajoutant le troisième nombre z, on a dès lors pour la somme totale qu'on vous fait connaître

$$S = 100x + 10y + z + 55;$$

d'où $$S - 55 = 100x + 10y + z.$$

Il est clair que x sera le chiffre des centaines, y celui des dixaines, et z celui des unités. Si S, par exemple, est 612, on a

$$612 - 55 = 567 = 100x + 10y + z;$$

d'où $$x = 5,\ y = 6,\ \text{et}\ z = 7.$$

Nous ne terminerons point ce Manuel sans parler de la quadrature du cercle; nous trouvons sur ce problème, dans l'excellent recueil de la *Bibliothèque universelle de Genève*, le mémoire suivant, qui pourra intéresser quelques uns de nos lecteurs; nous y avons ajouté quelques développemens en faveur des commençans.

QUADRATURE DU CERCLE.

Le fameux problème de la quadrature du cercle a eu, comme d'autres énigmes célèbres, beaucoup plus de réputation qu'il n'en méritait; et quoiqu'il ait perdu de son ancienne renommée, il occupe encore quelques cerveaux plus ou moins fêlés; et on voit arriver à l'Académie des Sciences de Paris,

Digitized by Google

presque tous les ans (et ordinairement pendant la canicule), des solutions prétendues, auxquelles on est convenu de ne donner aucune attention.

Les personnes qui n'ont pas étudié la géométrie, et c'est sans doute le plus grand nombre, ne se font pas une idée de l'état de la question; et c'est peut-être au défaut des notions claires et exactes sur cet objet, qu'on pourrait attribuer tant d'essais malheureux ou ridicules dans cette recherche. L'ignorant complet, qui entend parler de la quadrature du cercle, et qui croit qu'il s'agit de faire un cercle carré, rit ou lève les épaules; son confrère, qui se croit plus habile, ou plus fin, prétend résoudre le problème, en entourant d'un fil le cercle donné, puis en tendant ce fil sur quatre épingles plantées en carré. Le géomètre leur dit : « Ce n'est pas cela: il s'agit de trouver la surface d'un carré égal, *en toute rigueur*, à un cercle donné; » et, pour les mettre plus avant sur la voie, il leur *démontre* (après leur avoir appris toutefois ce que c'est qu'une *démonstration*) que la surface d'un cercle est égale à celle d'un triangle qui aurait pour base la circonférence du cercle, déployée, c'est-à-dire convertie en une ligne droite, et pour hauteur le rayon; que la surface de tout triangle est égale à la moitié du produit de sa base par sa hauteur, et enfin que la *racine carrée* de ce produit est égale au côté même du carré égal en surface au cercle donné.

Le problème se réduit donc à trouver cette ligne droite, égale en toute rigueur à la circonférence du cercle, rectifiée : aussi change-t-on souvent son énoncé en celui-ci : trouver la rectification de la circonférence du cercle, ou bien encore, trouver le rapport exact de la circonférence au diamètre.

Rien de plus aisé, dira l'homme aux expédiens; donnez-moi le cercle, je l'entoure *bien juste* d'un fil; j'étends ce fil, je le mesure au compas; je lui trouve trois diamètres du cercle, et environ $\frac{1}{8}$, et voilà votre problème résolu pour tous les cercles possibles. « A votre manière, répond le géomètre,

Digitized by Google

c'est-à-dire *à peu près*; mais cela ne nous contente pas : nous voulons, dans l'occasion, être sûrs, par exemple, que nous ne nous trompons pas d'un pouce sur un cercle qui aurait pour rayon les trente-cinq millions de lieues qu'il y a d'ici au soleil. Le diamètre d'un cheveu de plus ou de moins sur la longueur de votre fil, donnerait à l'orbite terrestre qu'on voudrait en conclure, d'après le rapport qu'il vous a indiqué, *quelques milliers* de lieues de plus ou de moins, et il s'agit d'un pouce sur une circonférence de deux cent vingt millions de lieues en moins : vous êtes donc loin de compte. »

« Hé bien, comment vous y prendrez-vous pour être *sûr*, ce qui s'appelle *sûr*, que vous êtes arrivé à cette exactitude si ambitieuse, si extrême? » Vous allez le comprendre : le géomètre considère la circonférence du cercle comme renfermée entre deux polygones d'un même nombre de côtés; l'un circonscrit, c'est-à-dire tracé au-dehors, et dont tous les côtés sont des *tangentes* au cercle; l'autre inscrit en dedans, et dont tous les côtés sont des *cordes* de ce même cercle, dont la circonférence est évidemment plus petite que la somme des côtés du polygone circonscrit, et plus grande que la somme de ceux du polygone inscrit. A mesure que nous multiplierons les côtés de ces deux polygones, nous renfermerons le cercle entre des limites de plus en plus approchées, toujours certains qu'il est en dedans de l'un, et en dehors de l'autre; ces deux limites sont faciles à assigner exactement en nombre, parce qu'elles ne sont que les sommes respectives des côtés rectilignes des polygones extérieurs et intérieurs. Ce calcul n'a point de limites, c'est-à-dire qu'on se rapproche à volonté, et à la mesure du besoin qu'on en a, du rapport exact qui est entre deux. On peut par amusement (si c'en est un), chercher à s'en approcher par les calculs suivans :

A étant la surface d'un polygone inscrit;
B celle du polygone circonscrit semblable;

Digitized by Google

A′ la surface du polygone inscrit, d'un nombre de côtés double;

B′ celle du polygone circonscrit, d'un nombre de côtés double; on a les relations suivantes :

$$A' = \sqrt{A + B}$$

$$\text{et } B' = \frac{2A \times B}{A + A'}$$

Soit le rayon du cercle $= 1$, le côté du carré inscrit sera $\sqrt{2}$, celui du carré circonscrit sera 2, pour la surface du carré inscrit $= 2$, et celle du carré circonscrit $= 4$; maintenant si l'on fait $A = 2$ et $B = 4$, on trouvera

l'octogone inscrit

$$= A' = \sqrt{8} = 2.8284271$$

et l'octogone circonscrit

$$= B' = \frac{16}{2 + \sqrt{8}} = 3.3137085$$

Connaissant ainsi les octogones inscrit et circonscrit, on trouvera par leur moyen les polygones d'un nombre de côtés double; il faudra de nouveau supposer $A = 2.8284271$ $B = 3.3137085$, et on aura

$$A' = \sqrt{A \times B} = 3.0614674 \text{ et}$$

$$B' = \frac{2A + B}{A + A'} = 3.1825979$$

Ensuite ces polygones de 16 côtés serviront à connaître ceux de 32, et ainsi de suite. Voici le calcul d'après M. Legendre :

Digitized by Google

Nombre des côtés.	Polygone inscrit.	Polygone circonscrit.
4.....	2.000000	4.000000
8.....	2.828427	3.313708
16.....	3.061467	3.182797
32.....	3.121445	3.151724
64.....	3.136548	3.144118
128.....	3.140331	3.142236
256.....	3.141277	3.141504
512.....	3.141513	3.141632
1024.....	3.141572	3.141602
2048.....	3.141587	3.141595
4096.....	3.141591	3.141593
8192.....	3.141592	3.141592
16384.....	3.141592	3.141592
32768.....	3.141592	3.141592

De là on conclut que la surface du cercle = 3.141592.

Le travail le plus considérable qui ait été fait sur les recherches du rapport de la circonférence au diamètre, est celui de M. Lagny, qu'on trouve dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, de 1719. Ce géomètre, supposant le diamètre d'un cercle représenté par l'unité suivie d'une virgule et de cent vingt-sept zéros, a calculé que la circonférence était exprimée par 3.141..... (*voyez* le Vocabulaire, au mot *facteur*). On est sûr que l'erreur qu'on commettrait en employant son rapport pour calculer la circonférence d'un cercle, d'après son diamètre, ne s'éleverait pas à une unité entière du cent vingt-septième ordre décimal; ordres pour lesquels la langue est bien loin de fournir des noms. — Quoi, reprend le novice, quand je voudrai chercher une circonférence de cercle, d'après un diamètre donné, j'aurai à faire une règle de trois, dont cet effroyable nombre sera l'un des termes! — Non, tranquillisez-vous; cette série qui vous fait peur, n'est qu'une espèce de *magasin d'exactitude*, dans lequel vous trouverez tou-

Digitized by Google

jours à vous assortir au degré qui vous convient. Ainsi, ne voulez-vous pousser la précision que jusqu'au dixième, vous ne prenez que la première des décimales dans votre règle de trois; vous dites, 1.0 est à 3.1 comme le diamètre donné est à la circonférence cherchée: voulez-vous des centièmes, vous dites 1.00 est à 3.14, etc.; des millièmes, 1.000 est à 3.141....., et ainsi de suite; on peut donc considérer le problème comme résolu pour tous les besoins de la science. Mais la pratique ordinaire voudrait de plus petits nombres: Archimède est venu à son secours. Le célèbre défenseur de Syracuse trouva un rapport exactement commode, celui de 7 à 22, exact jusqu'au centième un autre rapport, celui d'Adrien Metius, qui est représenté par d'assez petits nombres, a l'avantage d'être exact jusqu'au dix millionième; c'est celui de 113 à 355, nombre facile à retenir: ce sont les trois premiers nombres impairs, écrits chacun deux fois de suite, puis séparés en deux portions égales.

On a fait plusieurs tentatives pour trouver, par des opérations graphiques plus ou moins simples, c'est-à-dire avec la règle et le compas, le rapport approché du diamètre à la circonférence, pour les cas où l'on n'a pas besoin d'une grande précision: voici une construction assez simple, et qui donne un résultat exact jusqu'au dix millième, et qui ne commence par conséquent à différer que dans les cent millièmes.

Soit (*fig.* 38) A O B le diamètre du cercle dont on cherche le rapport avec la circonférence, on trouvera que A D (que nous allons déterminer) est égal à la demi-circonférence; ou 2 A D égale à la circonférence entière, exacte jusqu'à la cinquième décimale près, c'est-à-dire à $\frac{6}{100000}$, en opérant comme suit:

Soit menée au point D, la tangente indéfinie X D B;

Soit mené le rayon O R, perpendiculaire au diamètre A O B;

Digitized by Google

Soit porté le rayon, comme corde de R en S, on aura l'arc RS = 60°, et SB = 30°;

Du centre O, par le point S, soit menée la sécante OST, on aura TB = tang. 30°;

Partant du point T, portez trois fois le rayon le long de la tangente de T en D, point qui est ainsi déterminé.

Enfin, menez D'A : c'est la ligne sensiblement égale à la circonférence; car soit le rayon OB = 1.00000, on aura AD = 3.14153, qui ne diffère que de 0.00006 de 3.14159, qui présente les cinq premiers chiffres décimaux du rapport de M. de Lagny. On calcule aisément AD; car cette ligne est l'hypothénuse du triangle rectangle ABD, dans lequel AB = 2.00000; BD = 3.00000 — tang. 30° = 2.42265; or

$$\sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BD}^2} = AD = 3.14153.$$

L'erreur de ce résultat serait absolument insensible dans toutes les opérations graphiques possibles; car elle ne s'élèverait qu'à une ligne, pour un cercle qui aurait 231 pieds de diamètre. Au surplus, on trouvera dans le Dictionnaire, au mot *cercle*, une table qui donne le côté du carré égal au cercle, pour des diamètres de 1 à 100.

Problèmes à résoudre au moyen du Dictionnaire.

1°. L'aire d'un rectangle est de 80 m·q, et l'excès de sa base sur sa hauteur est 11 m. Trouver les valeurs numériques de ces deux lignes. *Réponse* 16 m et 5 m.

2°. L'aire d'un trapèze = 315 m·q, et ses deux bases parallèles sont 13 m et 21 m; quelle est sa hauteur? *Rép.* 77m,353.

3°. L'aire d'un triangle équilatéral est de 389 m·q, 71; trouver son côté. *Rép.* 30 m.

Digitized by Google

4°. L'aire d'un hexagone régulier est de 166$^{m.q}$ 272 ; quel est son côté? *Rép.* 8^{m}.

5°. La somme des trois côtés d'un triangle rectangle est 156^{m}, et sa surface égale 1014$^{m.q}$; déterminer chacun de ses côtés. *Rép.* 39^{m}, 52^{m}, 65^{m}.

6°. Les deux segmens du diamètre d'un cercle sont dans le rapport de 3 à 5, et les deux parties de la corde qui forme ces segmens sont 10 et 18; trouver ce diamètre. *Rép.* 27^{m},71.

7°. L'aire d'un cercle est de 132$^{m.q}$,7326; quel est son rayon? *Rép.* 6^{m},5.

8°. Trouver l'aire d'un cercle, sachant que les deux cordes, menées d'un point de la circonférence aux extrémités du diamètre, sont 17^{m} et 23^{m}. *Rép.* 643$^{m.q}$,456.

9°. Déterminer l'aire d'un secteur circulaire, dont l'arc est 48$^{gr.}$ 20′, et dont le rayon égale 20^{m}. *Rép.* 151$^{m.q}$,425.

10°. Les trois côtés d'un triangle sont 30^{m}, 24^{m}, et 20^{m}; le diviser en deux parties équivalentes par une ligne parallèle au plus grand côté. *Rép.* la ligne de division = 21^{m}, 21.

11°. Les trois côtés d'un triangle sont comme 3 : 7 : 8, et son aire est 340$^{m.q}$; quels sont ces trois côtés? *Réponse....* 17^{m},16; 40^{m},04; 45^{m},76.

12°. Trouver le rapport de l'aire du dodécagone régulier inscrit, à celle du carré circonscrit. *Réponse....* Le dodécagone inscrit est les $\frac{3}{4}$ du carré circonscrit.

Digitized by Google

DEGRÉS DE RÉAUMUR EN DEGRÉS CENTIGRADES.

Réaum.	centig.	Réaum.	centig.	Réaum.	centig.	Réaum.	centig.
1	1.25	21	26.25	41	51.25	61	76.25
2	2.50	22	27.50	42	52.50	62	77.50
3	3.75	23	28.75	43	53.75	63	78.75
4	5.»	24	30.»	44	55.»	64	80.»
5	6.25	25	31.25	45	56.25	65	81.25
6	7.50	26	32.50	46	57.50	66	82.50
7	8.75	27	33.75	47	58.75	67	83.75
8	10.»	28	35.»	48	60.»	68	85.»
9	11.25	29	36.25	49	61.25	69	86.25
10	12.50	30	37.50	50	62.50	70	87.50
11	13.75	31	38.75	51	63.75	71	88.75
12	15.»	32	40.»	52	65.»	72	90.»
13	16.25	33	41.25	53	66.25	73	91.25
14	17.50	34	42.50	54	67.50	74	92.50
15	18.75	35	43.75	55	68.75	75	93.75
16	20.»	36	45.»	56	70.»	76	95.»
17	21.25	37	46.25	57	71.25	77	96.25
18	22.50	38	47.50	58	72.50	78	97.50
19	23.75	39	48.75	59	73.75	79	98.75
20	25.»	40	50.»	60	75.»	80	100.»

DEGRÉS CENTIGRADES EN DEGRÉS DE RÉAUMUR.

centig.	Réaum.	centig.	Réaum.	centig.	Réaum.	centig.	Réaum.
1	0.8	26	20.8	51	40.8	76	60.8
2	1.6	27	21.6	52	41.6	77	61.6
3	2.4	28	22.4	53	42.4	78	62.4
4	3.2	29	23.2	54	43.2	79	63.2
5	4.»	30	24.»	55	44.»	80	64.»
6	4.8	31	24.8	56	44.8	81	64.8
7	5.6	32	25.6	57	45.6	82	65.6
8	6.4	33	26.4	58	46.4	83	66.4
9	7.2	34	27.2	59	47.2	84	67.2
10	8.»	35	28.»	60	48.»	85	68.»
11	8.8	36	28.8	61	48.8	86	68.8
12	9.6	37	29.6	62	49.6	87	69.6

Digitized by Google

centig.	Résum.	centig.	Résum.	centig.	Résum.	centig.	Résum.
13	10.4	38	30.4	63	50.4	88	70.4
14	11.2	39	31.2	64	51.2	89	71.2
15	12.»	40	32.»	65	52.»	90	72.»
16	12.8	41	32.8	66	52.8	91	72 8
17	13.6	42	33.6	67	53.6	92	73.6
18	14.4	43	34.4	68	54.4	93	74.4
19	15.2	44	35.2	69	55.2	94	75.2
20	16.»	45	36.»	70	56.»	95	76.»
21	16.8	46	36.8	71	56.8	96	76.8
22	17.6	47	37.6	72	57.6	97	77.6
23	18.4	48	38.4	73	58.4	98	78.4
24	19.2	49	39.2	74	59.2	99	79.2
25	20.»	50	40.»	75	60.»	100	80.»

TABLE DES VITESSES DU VENT.

Vitesses par seconde en mètres.	Vitesses par heure en mètres	en lieues.	
0 5.....	1,800..	0.40..	à peine sensible
1.0.....	3,600..	0.81..	sensible
2.0.....	7,200..	1.62..	modéré
5.5.....	19,800..	4.45..	assez fort
10.0.....	36,000..	8.16..	fort
20.0.....	72,000..	16.20..	très fort
22.5.....	81,000..	17.35..	tempête
27.0.....	97,200..	22.04..	grande tempête
36.0.....	104,400..	29.33..	ouragan
45.0.....	162,000..	36.62..	ouragan qui déracine les arbres et renverse les édifices.

Digitized by Google

TABLE *des Températures moyennes de quelques unes des principales villes en degrés du thermomètre centésimal.*

VILLES.	Quantité moyenne d'eau qui tombe annuellement.	Température moyenne de l'année.	TEMPÉRATURE MOYENNE de l'hiver.	de l'été.
Abo.....	centim.			
Amsterdam.				
Alger.....				
Berne.....		+ 9.6	c.o	+ 19.2
Bruxelles...		+ 11	+ 2.6	+ 19.0
Bordeaux...		+ 13.6	+ 5.6	+ 24.6
Christiania..		+ 6	— 1.8	+ 17.0
Copenhague.		+ 7.6	— 0.7	+ 17.6
Caire.....		+ 22.4	+ 14.7	+ 29.5
Dublin.....		+ 9.5	+ 4	+ 15.3
Dunkerque..		+ 10.3	+ 3.6	+ 17.8
Edimbourg.		+ 8.8	+ 3.7	+ 14.6
Genève.....		+ 9.6	+ 1.5	+ 18.3
Gottingue..	53	+ 8.3	— 0.9	+ 18.2
Londres....		+ 10.2	+ 4.2	+ 17.3
Montpellier.		+ 15.2	+ 6.7	+ 24.3
Marseille...	94	+ 15	+ 7.5	+ 22.5
Milan.....		+ 13.2	+ 2.4	+ 22.8
Moskou....		+ 4.5	— 11.8	+ 19.5
Nantes.....		+ 12.6	+ 4.7	+ 20.3
Pekin.....		+ 12.7	— 3.1	+ 28.1
Paris.....	53	+ 10.6	+ 3.7	+ 18.1
Philadelphie		+ 11.9	+ 0.1	+ 23.3
Pétersbourg.	46	+ 3.8	— 8.3	+ 16.7
Rome.....		+ 15.8	+ 7.7	+ 24.0
Stockholm..		+ 5.7	— 3.6	+ 16.6
Toulon.....		+ 16.7	+ 9.1	+ 23.9
Varsovie....		+ 9.2	— 1.8	+ 20.6
Vienne.....		+ 10.3	+ 0.4	+ 20.7
Zurich.....		+ 8.8	— 1.3	+ 17.8

Digitized by Google

TABLE USUELLE

D'APPLICATIONS MATHÉMATIQUES.

Le petit dictionnaire suivant n'est autre chose que l'extrait des meilleurs ouvrages de mathématiques élémentaires. Il en contient toute la partie usuelle; plus un bon nombre de tables fort utiles dans les relations sociales. J'ai moi-même fait usage pendant plusieurs années de ce petit aide-mémoire, et je puis affirmer qu'il m'a très-souvent épargné des recherches ennuyeuses et des calculs pénibles.

ALLIAGE. 1°. V étant la valeur de l'unité du mélange, x. y, les nombres d'unités mélangées, le prix de l'unité de mesure pour chacune étant p, p', on a la relation

$$V = \frac{px + p'y + \dots}{x + y + \dots}$$

a. b. c étant les nombres qui indiquent combien de fois il y a les quantités connues A. B. C de trois substances différentes dans un premier mélange; d. e. f dans un second, g. h. k dans un troisième, et l. m. n ce qu'il doit y avoir de chaque substance dans une quantité de mélange cherchée représentée par par $l + m + n$; soient enfin x. y. z les nombres par lesquels il faut multiplier les trois mélanges pour former le quatrième, on a

$$\begin{aligned} ax + dy + gz &= l \\ bx + ey + hz &= m \\ cx + fy + kz &= n \end{aligned}$$

Digitized by Google

$a. b. c$ étant les nombres qui indiquent combien de fois il y a les quantités connues A. B. C de trois substances dans un premier mélange ; $d. e. f$ dans un second ; $g. h. k$ dans un troisième : $x. y. z$ étant les prix respectifs de A. B. C, $p. q. r$ les prix respectifs des mélanges donnés, on a

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y + c\,r &= p \\ d\,x + e\,y + f\,z &= q \\ g\,x + h\,y + k\,z &= r \end{aligned}$$

ANGLE. Formé par deux droites connues par leurs équations (*V.* Equation), $y = ax + b$. $y = a'x + b'$. Soit A cet angle, on a

$$\text{tang A} = \frac{a - a'}{1 + a\,a'}.$$

ANNUITÉ. On nomme ainsi la rente d'un capital a, calculée de sorte qu'en payant chaque année une somme x, qui soit toujours la même, cette somme soit formée des intérêts échus, et d'un à-compte sur le capital, lequel se réduisant ainsi peu à peu, devient nul après un temps t déterminé. Si l'on veut connaître la somme z que redoit l'emprunteur après t années, ou après qu'il a effectué son t^{me} paiement, r étant *le denier*, ou la somme qui rapporte un franc par unité de temps, on a

$$z = (a - x\,r)\left(\frac{1 + r}{r}\right)^t + x\,r$$

Si l'emprunteur s'est acquitté, on a

$$x = \frac{a}{r} \times \frac{(1 + r)^t}{(1 + r)^t - r^t}$$

relation qui donne l'une des quantités $x. a. r.$ ou t, les autres étant connues ; mais on ne peut à la rigueur obtenir t que par

$$t = \frac{\log x + \log r - \log (r\,x - a)}{\log\ (1 + r) - \log r}$$

Digitized by Google

C'est au moyen de ces formules qu'on a calculé les deux tables suivantes, qui résoudront la plupart des questions usuelles.

TABLEAU *indiquant l'annuité que l'on doit recevoir ou payer à la fin de chaque année, pendant un nombre quelconque d'années, depuis un an jusqu'à 50, pour éteindre un prêt ou un emprunt de* 1000 fr., *avec les intérêts composés à* 2, 3, 4, 5, 6, *pour* o/o *l'an.*

ANNÉES	2 p. o/o	3 p. o/o	4 p. o/o	5 p. o/o	6 p. o/o
1	1020	1030	1040	1050	1060
2	515,05	522,61	530,20	537,81	545,44
3	346,76	353,53	360,35	367,21	374,11
4	262,62	269,03	275,50	282,01	288,60
5	212,16	218,36	224,63	230,98	237,40
6	178,53	184,60	190,76	197,02	203,36
7	154,51	160,51	166,61	172,82	179,14
8	136,51	142,46	148,53	154,72	161,04
9	122,52	128,43	134,49	140,70	147,02
10	111,33	117,23	123,29	129,70	135,87
11	102,18	108,08	114,15	120,39	126,79
12	94,56	100,46	106,55	112,83	119,28
13	88,12	94,03	100,14	106,46	112,96
14	82,60	88,53	94,67	101,02	107,59
15	77,83	83,77	89,94	96,34	102,96
16	73,65	79,61	85,82	92,27	98,96
17	69,97	75,95	82,20	88,70	95,45
18	66,70	72,71	78,99	85,55	92,36
19	63,78	69,81	76,14	82,75	89,62
20	61,16	67,22	73,58	80,24	87,19
21	58,79	64,87	71,28	78	85,01
22	56,63	62,75	69,20	75,97	83,05
23	54,67	60,80	67,31	74,14	81,28
24	52,87	59,81	65,59	72,47	79,68
25	51,22	57	64,01	70,95	78,23

Digitized by Google

SUITE DU TABLEAU.

ANNÉES	2 p. o/o	3 p. o/o	4 p. o/o.	5 p. o/o	6 p. o/o
26	49,90	55,94	62,57	69,56	76,90
27	48,99	54,56	61,24	68,29	75,70
28	46,99	53,29	60,01	67,12	74,59
29	45,78	52,12	58,88	66,05	73,58
30	44,65	51,02	57,83	65,05	72,65
31	43,60	50	56,86	64,13	71,80
32	42,61	49,05	55,95	63,28	71
33	41,69	48,16	55,10	62,50	70,27
34	40,82	47,32	54,32	61,76	69,60
35	40	46,54	53,58	61,07	68,97
36	39,23	45,80	52,89	60,43	68,40
37	38,51	45,11	52,24	59,84	67,86
38	37,82	44,46	51,63	59,28	67,36
39	37,17	43,84	51,06	58,77	66,89
40	36,56	43,26	50,52	58,28	66,46
41	35,97	42,71	50,02	57,82	66,06
42	35,42	42,19	49,54	57,40	65,68
43	34,89	41,70	49,10	56,99	65,33
44	34,39	41,23	48,67	56,62	65,01
45	33,91	40,79	48,26	56,26	64,70
46	33,45	40,36	47,88	55,93	64,42
47	33,02	39,96	47,52	55,61	64,15
48	32,60	39,58	47,18	55,32	63,90
49	32,20	39,21	46,86	55,04	63,66
50	31,82	38,87	46,55	54,78	63,44

Cette table, calculée pour une somme de 1000 fr., peut servir pour toute autre somme; une simple proportion donnerait le résultat désiré : cette remarque s'applique aussi évidemment à la table suivante, dans laquelle on suppose que les paiemens ne se font plus par années, mais par semestre.

Digitized by Google

TABLEAU *indiquant l'annuité que l'on doit recevoir ou payer à la fin de chaque* semestre, *pour un nombre quelconque de semestres, depuis* 4 *jusqu'à* 20, *pour éteindre un prêt ou un emprunt de* 1000 fr., *avec les intérêts compris, à* 5, 6, 7, 8, 9, 10 *pour* 0/0 *l'an.*

SEMESTRES.	5p. o/o par an.	6p. o/o par an.	7p. o/o par an.	8p. o/o par an	9p. o/o par an.	10 p. o/o par an.
4	265,82	269,01	272,27	275,52	278,79	282,05
5	215,24	218,37	221,51	224,62	227,81	230,97
6	181,55	184,59	187,69	190,79	193,90	197,01
7	157,49	160,49	163,55	166,61	169,72	172,83
8	139,47	142,45	145,49	148,52	151,62	154,72
9	125,46	128,45	131,47	134,50	137,59	140,69
10	114,26	117,23	120,26	123,29	126,40	129,51
11	105,11	108,07	111,11	114,15	117,27	120,39
12	97,49	100,46	103,50	106,55	109,69	112,83
14	85,84	88,53	91,60	94,67	97,84	101,02
16	76,60	79,61	82,71	85,82	89,04	92,27
18	69,67	72,71	75,85	79,00	82,27	85,55
20	64,16	67,21	70,39	63,58	76,91	80,25

ARC. On obtient sa longueur a, lorsqu'on connaît sa graduation en degrés ° au moyen de

$(a°) = ra$, en minutes par $(a') = r'a$ et en secondes par $(a'') = r''a$, sachant d'ailleurs que

$r = 57°, 29578$ dont le log $1,7581226$

$r' = 3437', 746$ log $3,5362738$

$r'' = 206264'', 8$ log $5,3144251$

r représente ici le nombre de degrés de l'arc égal au

Digitized by Google

rayon, r'. r'' sont les nombres de minutes ou de secondes de cet arc.

BINOME. Développement de la puissance m du binome $x + a$;

Loi. Le nombre des termes est $m + 1$;

Le 1er terme est x^m, le 2me $m x^{m-1} a$.

Les exposans de x vont toujours en diminuant d'une unité, ceux de a en augmentant d'une unité; le co-efficient d'un terme quelconque, est le produit du co-efficient du terme précédent, par l'exposant de x dans ce même terme, divisé par le nombre qui exprime le rang de ce terme; le dernier terme sera a^m.

Formule,

$$(x + a)^m = x^m + m\,a\,x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3 x^{m-3} + \ldots\ldots + \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} a^n x^{m-n} \ldots\ldots + a^m$$

La même formule pourra servir au développement de $(x + a + b)^m$, en faisant $a + b = c$, développant $(x + c)^m$ et remettant ensuite $a + b$ à la place de c.

Si l'on avait à développer $(x - a)^m$, il suffirait de changer le signe du second terme, celui du quatrième, celui du sixième, et en général celui de chaque terme de rang pair.

On sait que $x + a = x\left(1 + \frac{a}{x}\right)$ et que $(a + x)^m$

Digitized by Google

$$= x^m \left(1 + \frac{a}{x}\right)^m$$

On cherche pour plus de simplicité le développement de $\left(1 + \frac{a}{x}\right)^m$ ou celui de $(1 + y)$ en faisant

$$\frac{a}{x} = y .$$

$$(1+y)^m = 1 + \frac{m}{1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} y^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} y^3 - \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} y^4 + \ldots.$$

m étant un nombre entier, la série s'arrêtera, lorsque l'on sera arrivé au terme du rang $m+1$.

Si l'exposant est fractionnaire, on a

$$(1+y)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} y + \frac{m(m-n)}{n.2n} y^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n.2n.3n} y^3 + \frac{m(m-n)(m-2n)(m-3n)}{n.2n.3n.4n} y^4 \ldots +$$

Ce développement ne peut jamais s'arrêter.

Si l'exposant est négatif

$$(1+y)^{-m} = 1 - \frac{m}{1} y + \frac{m(m+1)}{1.2} y^2$$

Digitized by Google

$$-\frac{m(m+1)(m+2)}{1.2.3}y^3$$

$$+\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{1.2.3.4}y^4 -$$

CALOTTE SPHÉRIQUE. R étant le rayon de la sphère, h la hauteur de la calotte, dont la surface est S, on a

$$S = 2\pi R h$$

CERCLE. Sa surface $C = \pi R^2$, son rayon $R = 0{,}564189\sqrt{C}$.

CIRCONFÉRENCE du cercle, dont le diamètre est 1

$= 3.14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433$
$\quad 83269\ 56288\ 41971\ 69399\ 37510.$

(*Voyez* page suivante.)

Digitized by Google

TABLE *des Cercles de diamètres* 1 *à* 100 *de leurs aires, de leurs circonférences, et de la longueur du côté d'un carré équivalent.*

Diam.	Aire.	Circonférence.	Côté d'un carré équivalent.
1.00	0.7853981	3.14159265	0.88622692
.25	1.22718463	3.92699081	1.10778365
.5	1.76714586	4.71238898	1.32934038
.75	2.40528187	5.49778714	1.55089711
2.	3.14159265	6.28318530	1.77245384
.25	3.97607820	7.06858347	1.99401058
.5	4.90873852	7.85398163	2.21556731
.75	5.93957361	8.63937979	2.43712404
3.	7.06858347	9.42477796	2.65868077
.25	8.29576810	10.21017612	2.88023750
.5	9.62112750	10.99557428	3.10179423
.75	11.04466167	11.78097245	3.32335096
4.	12.56637061	12.56637061	3.54490769
.25	14.18625432	13.35176877	3.76646442
.5	15 90431280	14.13716694	3.98802116
.75	17.72054606	14.92256510	4.20957789
5.	19.63495408	15.70796326	4.43113462
.25	21.64753687	16.49336143	4.65269135
.5	23.75829444	17.27875959	4.87424808
.75	25.96722677	18.06415775	5.09580482
6.	28.27433388	18.8495559	5.31736155
.25	30.67961575	19.63495408	5.53891828
.5	33.18307240	20.42035224	5.76047501
.75	35.78470382	21.20575041	5.98203174
7	38.48456000	21.99114857	6.20358847
.25	41.28249096	22.77654673	6.42514520
.5	44.17864669	23.56194490	6.64670193
.75	47.17297718	24.34734306	6.86825866
8.	50.26548245	25.13274122	7.08981539
.25	53.45616249	25 91813939	7.31137213

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

Diam.	Aire.	Circonférence.	Côté d'un carré équivalent.
8.5	56.745017 30	26.703537 55	7.532928 86
.75	60.132046 88	27.488935 71	7.754485 59
9.	63.617251 23	28.274333 88	7.976042 32
.25	67.200630 35	29.059732 04	8.197599 05
.5	70.882184 24	29.845130 20	8.419155 78
.75	74.661912 90	30.630528 37	8.640712 51
10.	78.539816 33	31.415926 53	8.862269 25
.25	82.515894 54	32.201324 69	9.083825 98
.5	86.590147 51	32.986722 86	9.305382 70
.75	90.762575 25	33.772121 02	9.526939 44
11.	95.033177 77	34.557519 18	9.748496 17
.25	99.401955 05	35.342917 35	9.970052 90
.5	103.868907 11	36.128315 51	10.191609 64
.75	108.434033 93	36.913713 67	10.413166 37
12.	113.097335 53	37.699111 84	10.634723 10
.25	117.858811 89	38.484510 00	10.856279 83
.5	122.718463 03	39.269908 16	11.077836 56
.75	127.676288 93	40.055306 33	11.299393 29
13.	132.732289 61	40.840704 49	11.520950 02
.25	137.886465 06	41.626102 65	11.742506 75
.5	143.138815 27	42.411500 82	11.964063 48
.75	148.489340 26	43.196898 98	12.185620 21
14.	153.938040 02	43.982297 14	12.407176 95
.25	159.484914 55	44.767695 31	12.628733 68
.5	165.129963 85	45.553093 47	12.850290 41
.75	170.873187 92	46.338491 63	13.071847 14
15.	176.714586 76	47.123889 80	13.293403 88
.25	182.654160 28	47.909287 96	13.514960 61
.5	188.691908 75	48.694686 13	13.736517 34
.75	194.827831 90	49.480084 29	13.958074 07
16.	201.061929 82	50.265482 45	14.179630 80
.25	207.394202 52	51.050880 62	14.401187 53

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

Diam.	Aire.	Circonférence.	Côté d'un carré équivalent.
16.5	213.82464998	51.83627878	14.62274426
.75	220.35327221	52.62167694	14.84430099
17.	226.98006922	53.40707511	15.06585772
.25	233.70504099	54.19247327	15.28741446
.5	240.52818753	54.97787143	15.50897119
.75	247.44950885	55.76326960	15.73052792
18.	254.46900493	56.54866776	15.95208465
.25	261.58667578	57.33406592	16.17364138
.5	268.80252140	58.11946409	16.39519811
.75	276.11654180	58.90186225	16.61675484
19.	283.52873696	59.69026041	16.83831157
.25	291.03910692	60.47565858	17.05986830
.5	298.64765163	61.26105674	17.28142503
.75	306.35437111	62.04645490	17.50298177
20.	314.15926535	62.83185307	17.72453850
.25	322.06233437	63.61725123	17.94609524
.5	330.06357816	64.40264939	18.16765197
.75	338.16299672	65.18804756	18.38920870
21.	346.36059005	65.97344572	18.61076543
.25	354.65635814	66.75884388	18.83232216
.5	363.05030101	67.54424205	19.05387889
.75	371.54241865	68.32964021	19.27543562
22.	380.13271106	69.11503837	19.49699235
.25	388.82117826	69.90043654	19.71854908
.5	397.60782021	70.68583470	19.94010581
.75	406.49263694	71.47123286	20.16166255
23.	415.47562843	72.25663103	20.38321928
.25	424.55679467	73.04202919	20.60477601
.5	433.73613573	73.82742735	20.82633274
.75	443.01365154	74 61282552	21.04788945
24.	452. 38934207	75.39822368	21.26944618
.25	461.86320745	76.18362184	21.49100291

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

Diam.	Aire.	Circonférence.	Côté d'un carré équivalent.
24.5	471.435247 57	76.96902001	21.71255964
.75	481.10546239	77.75411817	21.93411637
25.	490.87385212	78.53981634	22.15563382
.25	500.73041655	79.32521450	22.37721986
.5	510.70515575	80.11061266	22.59878659
.75	520.76806971	80.89601083	22.82034332
26.	530.92915845	81.68140899	23.04190006
.25	541.18842196	82.46680716	23.26345679
.5	551.54586024	83.25220532	23.48501352
.75	562.00147328	84.03760348	23.70657025
27.	572.55526110	84.82300164	23.92812698
.25	583.20722369	85.60839981	24.14968371
.5	593.95736105	86.39379797	24.37124044
.75	604.80567318	87.17919613	24 59279717
28.	615.75216017	87.96459430	24.81435390
.25	626.79682177	88.74999246	25.03591063
.5	637.93965822	89.53539062	25 25746737
.75	649.18066943	90.32078879	25.47902410
29	660.51985541	91.10618695	25.70058083
.25	671.95721616	91.89158511	25.92213756
.5	683.49275169	92.67698328	26.14369429
.75	695.12646198	93.46238144	26.36525102
30.	706.85834704	94.24777960	26.58680776
.25	718 68840688	95.03317777	26.80836449
.5	730.61664148	95.81857593	27.02992122
.75	742.64305085	96.60397409	27.25147794
31.	754.76763502	97.38937226	27.47303468
.25	766.99039394	98.17477042	27.69459141
.5	779.31132762	98.96016858	27.91614814
.75	791.73043607	99.74556675	28.13770488
32.	804.24771930	100.53096491	28.35926161
.25	816.86317729	101.31636307	28.58081834

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

Diam.	Aire.	Circonférence	Côté d'un carré équivalent.
32.5	829.57681005	102.10176124	28.80237507
.75	842.38861759	102.88715940	29.02393180
33.	855.29859989	103.67255756	29.24548853
.25	868.30675696	104.45795573	29.46704526
.5	881.41308881	105.24335389	29.68860199
.75	894.61759542	106.02875205	29.91015872
34.	907.92027688	106.81415022	30.13171545
.25	921.32113305	107.59954838	30.35327219
.5	934.82016398	108.38494654	30.57482892
.75	948.41736968	109.17034471	30.79638565
35.	962.11275016	109.95574287	31.01794239
.25	975.90630540	110.74114103	31.23949912
.5	989.79803541	111.52653920	31.46105585
.75	1003.78794019	112.31193736	31.68261258
36.	1017.87601975	113.09733552	31.90416931
.25	1032.06227407	113.88273369	32.12572604
.5	1046.34670316	114.66813185	32.34728277
.75	1060.72930701	115.45353001	32.56883950
37.	1075.21008569	116.23892818	32.79039623
.25	1089.78903909	117.02432634	33.01195296
.5	1104.46616727	117.80972450	33.23350970
.75	1119.24147022	118.59512267	33.45506643
38.	1134.11494794	119.38052083	33.67662316
.25	1149.08660043	120.16591899	33.89817989
.5	1164.15642768	120.95131716	34.11973662
.75	1179.32442971	121.73671532	34.34129335
39.	1194.59060651	122.52211348	34.56285008
.25	1209.95495809	123.30751165	34.78440681
.5	1225.41748449	124.09290981	35.00596354
.75	1240.97818552	124.87830797	35.22752027
40.	1256.63704143	125.66370614	35.44907701
.25	1272.39411208	126.44910430	35.67063374

Digitized by Google

Suite de la Table.

Diam.	Aire.	Circonférence.	Côté d'un carré équivalent.
40.5	1288.24933751	127.23450246	35.89219048
.75	1304.20273770	128.01990063	36.11374721
41.	1320.25431266	128.80529879	36.33530394
.25	1336.40406240	129.59069695	36.55686067
.5	1352.65198690	130.37609512	36.77841740
.75	1368.99808617	131.16149328	36.99997413
42.	1385.44236022	131.94689144	37.22153086
.25	1401.98480903	132.73228961	37.44308759
.5	1418.62543261	133.51768777	37.66464432
.75	1435.36423096	134.30308593	37.88620105
43.	1452.20120412	135.08848410	38.10775779
.25	1469.13635202	135.87388226	38.32931452
.5	1486.16967468	136.65928042	38.55087125
.75	1503.30117212	137.44467859	38.77242798
44.	1520.53084433	138.23007675	38.99398471
.25	1537.85869131	139.01547491	39.21554144
.5	1556.28471306	139.80087308	39.43709817
.75	1572.80890957	140.58627124	39.65865490
45.	1590.43128086	141.37166940	39.88021164
.25	1608.15182692	142.15706757	40.10176837
.5	1625.97054775	142.94246573	40.32332510
.75	1643.88744335	143.72786390	40.54488183
46.	1661.90251374	144.51326206	40.76643856
.25	1680.01575889	145.29866022	40.98799530
.5	1698.22717880	146.08405839	41.20955203
.75	1716.53677348	146.86945655	41.43110876
47.	1734.94454294	147.65485471	41.65266549
.25	1753.45048716	148.44025288	41.87422222
.5	1772.05460615	149.22565104	42.09577891
.75	1790.75689992	150.01104920	42.31733568
48.	1809.55736845	150.79644797	42.53889241
25	1828.45601175	151.58184553	42.76044914

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

Diam.	Aire.	Circonférence.	Côté d'un carré équivalent.
48.5	1847.45282982	152.36724369	42.98200587
.75	1866.54782267	153.15264186	43.20356261
49.	1885.74099031	153.93804002	43.42511934
.25	1905.83233270	154.72343818	43.64667607
.5	1924.42184986	155.50883635	43.86823280
.75	1943.90954179	156.29423451	44.08978953
50.	1963.49540848	157.07963268	44.31134627
.25	1983.17944995	157.86503084	44.53290300
.5	2002.96166619	158.65042900	44.75445973
.75	2022.84205720	159.43582717	44.97601646
51.	2042.82062298	160.22122533	45.19757319
.25	2062.89736352	161.00662349	45.41912992
.5	2083.07227884	161.79202166	45.64068665
.75	2103.34536893	162.57741982	45.86224338
52.	2123.71663382	163.36281798	46.08380012
.25	2144.18607346	164.14821615	46.30535685
.5	2164.75368786	164.93361431	46.52691358
.75	2185.41947703	165.71901247	46.74847031
53.	2206.18344098	166.50441064	46.97002704
.25	2227.04557969	167.28980880	47.19158377
.5	2248.00589318	168.07520696	47.41314050
.75	2269.06438143	168.86060513	47.63469723
54.	2290.22104445	169.64600329	47.85625396
.25	2311.47588225	170.43140145	48.07781069
.5	2332.82889481	171.21679962	48.29936743
.75	2354.28008215	172.00219778	48.52092416
55.	2375.82944427	172.78759594	48.74248089
.25	2397.47698115	173.57299411	48.96403763
.5	2419.22269280	174.35839227	49.18559436
.75	2441.06657922	176.14379043	49.40715109
56.	2463.00864068	175.92918860	49.62870782
.25	2485.04887637	176.71458676	49.85026455

Digitized by Google

Diam.	Aire.	Circonférence.	Côté d'un carré équivalent.
56.5	2507.18728710	177.49998492	50.07182128
.75	2520.42387260	178.28538309	50.29337801
57.	2551.75863286	179.07078125	50.51493474
.25	2574.19156790	179.85617941	50.73649147
.5	2596.72267781	180.64157758	50.95804820
.75	2619.35196239	181.42697574	51.17960494
58.	2642.07942166	182.21237390	51.40116167
.25	2664.90505579	182.99777207	51.62271840
.5	2687.82886464	183.78317023	51 84427513
.75	2710.85084834	184.56856839	52.06583186
59.	2733.97100678	185.35396656	52.28738859
.25	2757.18933998	186.13936472	52.50894532
.5	2780.50584795	186.92476288	52.73050205
.75	2803.92053070	187.71016105	52.95205878
60.	2827.43338821	188.49555921	53.17361552
.25	2851.04442049	189.28095737	53.39517225
.5	2874.75362754	190.06635554	53.61672898
.75	2898.56100937	190.85175370	53.83828572
61.	2922.46656692	191.63715186	54.05984245
.25	2946.47029734	192.42255003	54.28139918
.5	2970.57220350	193.20794819	54.50295591
.75	2994.77228444	193.99334635	54.72451264
62.	3019.07054008	194.77874452	54.94606937
.25	3043.46697053	195.56414268	55 16762610
.5	3067.96157576	196.34954084	55.38918283
.75	3092.55435572	197.13493901	55 61073956
63.	3117.24531051	197.92033717	55.83229629
.25	3142.03444002	198.70573533	56.05385303
.5	3166.92174434	199.49113350	56.27540976
.75	3191.90722341	200.27653166	56.49696649
64.	3216.99087720	201.06192982	56.71852322
.25	3242.17270581	201.84732799	56.94007995

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

Diam.	Aire.	Circonférence.	Côté d'un carré équivalent.
64.5	3267.45270920	202.63272615	57.16163668
.75	3292.83088742	203.41812431	57.38319311
65.	3318.30724030	204.20352248	57.60475015
.25	3343.88176802	204.98892064	57.82630688
.5	3369.55447036	205.77431880	58.04786361
.75	3395.32534774	206.55971697	58.26942034
66.	3421.19439974	207.34511513	58.49097707
.25	3447.16162652	208.13051329	58.71253380
.5	3473.22702806	208.91591146	58.93409054
.75	3499.39060438	209.70130962	59.15564727
67.	3525.65235549	210.48670778	59.37720400
.25	3552.01228735	211.27210595	59.59876073
.5	3578.47038197	212.05750411	59.82031746
.75	3605.02665737	212.84290227	60.04187419
68.	3631.68110754	213.62830044	60.26343092
.25	3658.43373248	214.41369860	60.48498765
.5	3685.28453219	215.19909676	60.70654438
.75	3712.23350667	215.98449493	60.92810111
69	3739.28065592	216.76989309	61.14965785
.25	3766.42597994	217.55529125	61.37121458
.5	3793.66947873	218.34068942	61.59277131
.75	3821.01115229	219.12608758	61.81432804
70.	3848.45100064	219.91148574	62.03588478
.25	3875.98902375	220.69688391	62.25744151
.5	3903.62522162	221.48228207	62.47899824
.75	3931.35959426	222.26768023	62.70055497
71.	3959.19214168	223.05307840	62.92211170
.25	3987.12286386	223.83847656	63.14366843
.5	4015.15176082	224.62387472	63.36522516
.75	4043.27883254	225.40927289	63.58678189
72.	4071.50407903	226.19467105	63.80833862
.25	4099.82750030	226.98006921	64.02989536

Digitized by Google

Suite de la Table.

Diam.	Aire.	Circonférence.	Côté d'un carré équivalent.
72.5	4128.24909633	227.76546738	64.25145209
.75	4156.76886714	228.55086554	64.47300882
73.	4185.38681274	229.33626370	64.69456555
.25	4214.10293309	230.12166187	64.91612228
.5	4242.91722821	230.90706003	65.13767901
.75	4271.82969810	231.69245819	65.35923574
74.	4300.84034275	232.47785636	65.58079247
.25	4329.94916219	233.26325452	65.80234920
.5	4359.15615638	234.04865268	66.02390593
.75	4388.46132535	234.83405085	66.24546267
75.	4417.86466909	235.61944901	66.46701940
.25	4447.36618760	236.40484717	66.68857613
.5	4476.96588088	237.19024534	66.91043296
.75	4506.66374893	237.97564350	67.13168960
76.	4536.45979178	238.76104166	67.35324633
.25	4566.35400937	239.54643983	67.57480306
.5	4596.34640174	240.33183799	67.79635979
.75	4626.43696897	241.11723615	68.01791652
77.	4656.62571078	241.90263432	68.23947325
.25	4686.91262745	242.68803248	68 46102998
.5	4717.29771890	243.47343064	68.68258671
.75	4747.78098511	244.25882881	68.90414344
78.	4778.36242610	245.04422697	69.12570018
.25	4809.04204185	245 82962513	69.34726691
.5	4839.81983238	246.61502330	69.56881364
.75	4870.79579767	247.40042146	69.79037037
79.	4901.66993776	248.18581962	70.01192710
.25	4932.74225260	248.97121779	70.23348383
.5	4963.91274221	249.75661595	70.45504056
.75	4995.18140659	250.54201411	70.67659729
80.	5026.54824574	251.32741228	70.89815403
.25	5058.01325966	252.11281044	71.11971076

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

Diam.	Aire.	Circonférence.	Côté d'un carré équivalent.
80.5	5089.57644835	252.89820860	71.34126749
.75	5121.23781181	253.68360677	71.56284422
81.	5152.99735004	254.46900493	71.78438096
.25	5184.85506304	255.25440309	72.00593769
.5	5216.81095081	256.03980126	72.22749442
.75	5248.86501335	256.82519942	72.44905115
82.	5281.01725068	257.61059758	72.67060788
.25	5313.26766276	258.39599575	72.89216461
.5	5345.61624962	259.18139391	73.11372134
.75	5378.06301124	259.96679207	73.33527807
83.	5410.60794764	260.75219024	73.55683480
.25	5443.25105880	261.53758840	73.77839153
.5	5475.99234474	262.32298656	73.99994827
.75	5508.83180544	263.10838473	74.22150500
84.	5541.76944092	263.89378289	74.44306173
.25	5574.80525116	264.67918105	74.66461846
.5	5607.93923618	265.46457922	74.88617519
.75	5641.17139596	266.24997738	75.10773192
85.	5674.50173054	267.03537554	75.32928866
25.	5707.93023987	267.82077371	75.55084539
.5	5741.45692397	268.60617187	75.77240212
.75	5775.08178284	269.39157003	75.99395885
86.	5808.80481648	270.17696820	76.21551558
.25	5842.62602489	270.96236636	76.43707232
.5	5876.54540807	271.74776452	76.65862904
.75	5910.56296602	272.53316269	76.88018578
87.	5944.67869874	273.31856085	77.10174251
.25	5978.89260623	274.10395901	77.32329924
.5	6013.20468849	274.88935718	77.54485597
.75	6047.61494552	275.67475534	77.76641270
88.	6082.12337734	276.46015350	77.98796943
.25	6116.72998392	277.24555167	78.20952616

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

Diam.	Aire.	Circonférence.	Côté d'un carré équivalent.
88.5	6151.43476526	278.03094983	78.43103289
.75	6186.23772138	278.81634799	78.65263962
89.	6221.13885226	279.60174616	78.87419635
.25	6256.13815792	280.38714432	79.09575309
.5	6291.23763834	281.17254248	79.31730982
.75	6326.43729354	281.95794065	79.53886655
90.	6361.72512350	282.74333881	79.76042329
.25	6397.11712824	283.52873697	79.98198002
.5	6432.60730774	284.31413514	80.20353673
.75	6468.19566202	285.09953330	80.42509348
91.	6503.88219109	285.88493146	80.64669021
.25	6539.66689491	286.67032962	80.86820694
.5	6575.54977350	287.45572779	81.08976367
.75	6611.53082686	288.24112595	81.31132040
92.	6647.61005499	289.02652412	81.53287713
25.	6683.78745789	289.81192228	81.75443366
.5	6720.06303556	290.59732044	81.97599060
.75	6756.43678800	291.38271861	82.19754733
93.	6792.90871521	292.16811677	82.41910406
.25	6829.47881719	292.95351493	82.64066079
.5	6866.14709394	293.73891310	82.86221752
.75	6902 91354546	294.52431126	83.08377425
94.	6939.77817177	295.30970942	83.30533096
.25	6976.74097284	296.09510759	83.52688771
.5	7013.80194367	296.88050579	83.74844444
.75.	7050.96109928	297.66590391	83.97000117
95.	7088.21842465	298.45130208	84.19155791
25.	7125.57392480	299.23670024	84.41311464
.5	7163.02759971	300.02209840	84.63467136
.75	7200.57944940	300.80749657	84.8562284
96.	7238.22947380	301.59289473	85.07778484
.25	7275.97767308	302.37829269	85.29934157

Digitized by Google

SUITE DE LA TABLE.

Diam.	Aire.	Circonférence.	Côté d'un carré équivalent.
96.5	7313.82404707	303.16369106	85.52089830
.75	7351.76859584	303.94908922	85.74245503
97.	7389.81131940	304.73448738	85.96401176
.25	7427.95221771	305.51988555	86.18556849
.5	7466.19129079	306.30528371	86.40712522
.75	7504.52853864	307.09068187	86.62868195
98.	7542.96396126	307.87608004	86.85023869
.25	7581.49755865	308.66147820	87.07179542
.5	7620.12933081	309.44687635	87.29335215
.75	7658.85927774	310.23227453	87.51490888
99.	7697.68739944	311.01767269	87.73646568
.25	7736.61369591	311.80307085	87.95802234
.5	7775.63816715	312.58846902	88.17957907
.75	7814.76081316	313.37386718	88.40113580
100.	7853.98163397	314.15926535	88.62269254
.25	7893.30062952	314.94466352	88.84424927
.5	7932.71779985	315.73006168	89.06580600
.75	7972.23314494	316.51545984	89.28736273

COMBINAISON. On distingue deux espèces de combinaisons; celles avec répétition et celles sans répétition: si l'on se sert de la notation (mC n) pour désigner le nombre de combinaisons de m élémens combinés n à n, on a,

Avec répétition,

$$(m\,\mathrm{C}\,n) = \frac{m(m+1)(m+2)\ldots(m+n+1)}{1\times 2\times 3\times\ldots n}.$$

Digitized by Google

Sans répétition,

$$(m\,C\,n) = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1\times 2\times 3\times \ldots \quad n}$$

CONE DROIT. R étant le rayon de la base, A la génératrice, S la surface, D le diamètre de la base, on a

$$S = \pi\,A\,R$$

h étant sa hauteur et V son volume,

$$V = \tfrac{1}{3}\,\pi\,R^2\,h = \tfrac{1}{12}\,\pi\,D^2\,h = D^2\,h \times 0{,}261799387799149436538553615273\ldots.$$

CONE TRONQUÉ. Sa surface = son côté × la moitié de la somme des circonférences des bases, et si R, r représentent les rayons, ou D et d les diamètres des bases et h la hauteur, son volume V est

$$V = \tfrac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + R\,r) = h\left[(D+d)^2 - D\,d\right] \times 0{,}261799387799149\ldots.$$

CORDE. Si k est la longueur de la corde d'un arc a, pris dans un cercle de rayon R

$$k = 2\,R\sin\tfrac{1}{2}\,a$$

Cette équation donne la graduation a d'un arc, connaissant sa corde, et réciproquement.

COSINUS. Valeur du cosinus de l'arc dont la longueur est x (ne point confondre la longueur avec le nombre de degrés, *voyez* Arc), dans le cercle dont le rayon est 1 :

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{2.3.4} - \frac{a^6}{2.3.4.5.6} + \ldots..$$

CYLINDRE DROIT. R étant le rayon de la base, H sa hauteur, S sa surface, V son volume, on a

Digitized by Google

$$S = 2\pi R H$$

$$V = \pi R^2 H$$

DEGRÉ. (Voyez *Arc.*)

DIAGONALE du carré dont le côté est $1 = \sqrt{2} =$ 1.4142135623730950488016887242097...

DISTANCE δ d'un point $x'y'$ à une ligne donnée $y = ax + b$

$$\delta = \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{(1 + a^2)}}$$

Distance entre deux points donnés $x'y'$ $(x''y'')$

$$\Delta = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$$

ÉQUATION. On appelle ainsi dans la géométrie analytique la relation entre les coordonnées x et y de chacun des points d'une droite ou d'une courbe.

Équation d'une droite. a est la tangente trigonométrique de l'angle formé par la droite et l'axe des x, le rayon est 1 et les axes rectangulaires.

La droite *passant par l'origine des axes*

$$y = ax$$

ne passant point par l'origine

$$y = ax + b$$

passant par un point donné (x', y')

$$y - y' = a(x - x')$$

et par *deux points donnés* (x', y') (x'', y'')

$$y - y' = \frac{y' - y''}{x' - x''}(x - x')$$

Équation de la perpendiculaire a la droite dont l'équation est $y = ax$ ou $y = ax + b$

$$y = -\frac{1}{a}x \qquad \text{ou } y = -\frac{1}{a}x + b$$

Digitized by Google

Cette *perpendiculaire passant* en outre par un *point donné* (x', y')

$$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x')$$

Equation du cercle. R étant le rayon de ce cercle, x et y les coordonnées d'un point quelconque de sa circonférence.

L'*origine* des coordonnées *étant au centre*, on a

$$y^2 + x^2 = R^2$$

L'origine des coordonnées n'étant point au centre, et ce centre ayant pour coordonnées a et b,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

L'origine à l'extrémité du diamètre donne

$$y^2 = 2Rx - x^2$$

Équation de l'ellipse. a étant le *demi-grand axe* et b le *demi-petit axe*.

L'équation rapportée aux axes et au sommet

$$a^2 y^2 = b^2 (2ax - x^2)$$

rapportée au centre et aux axes, on a

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

δ étant la distance d'un point quelconque de la courbe au foyer, θ l'angle que fait la trace de cette distance avec le grand axe, e le rapport de l'excentricité au demi-grand axe a, l'équation polaire est, le pole étant au foyer,

$$\delta = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e\cos\theta}$$

Équation de l'hyperbole. a étant le demi-premier axe, b le demi-second axe, l'origine étant au sommet,

$$a^2 y^2 = b^2 (2ax + x^2),$$

l'origine étant au centre

Digitized by Google

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$$

L'équation polaire de l'hyperbole (les mêmes lettres désignant les mêmes choses que pour le cas de l'ellipse) est

$$\delta = \frac{a(e^2 - 1)}{1 + e\cos\theta}$$

Équation de la parabole rapportée au sommet est

$$y^2 = 2px$$

p est ici le demi-paramètre, c'est-à-dire la demi-ordonnée passant par le foyer de la courbe, l'équation polaire est

$$\delta = \frac{p}{1 + \cos\theta}$$

δ étant la distance d'un point quelconque de la courbe au foyer pris pour pôle, et θ l'angle que fait δ avec l'axe des x.

ELLIPSE. a étant le petit axe, b le grand axe, S sa surface, on a $S = \frac{1}{4}\pi ab$ ou

$S = ab \times 0{,}78539816339744830961566084581 9\ldots$

ELLIPSOIDE. Son volume V = (axe de révolution)^2 (axe fixe) $\times \frac{4}{6}\pi$

ou $V = b^2 a \times 0{,}52359877559829887307710723054 6\ldots$

ESCOMPTE. C'est en général la remise que fait le créancier en faveur du paiement anticipé qu'on lui fait d'une somme avant l'échéance du paiement. L'escompte se fait à tant pour 100 par an, mois, etc. Si l'on désigne la somme due par a, le nombre (arbitraire mais communément 100) sur lequel on suppose en général que se fait l'escompte d, ce qu'on *escompte* sur ce nombre i, le temps que le paiement est anticipé et qui doit être exprimé en unités ou fractions d'unités de même espèce que le taux de l'escompte, c'est en années et fractions d'an-

Digitized by Google

nées, si l'escompte est fixé à tant pour 100 par an, et en mois ou fractions de mois si l'escompte est fixé à tant pour 100 par mois. Nous appellerons ce temps t, ce qui reste après l'escompte fait ou ce qui revient à celui qui fait escompter $= r$, on a les relations suivantes

$$r = a\left(\frac{d}{d+it}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{100\,d}{100+it}$$

$$a = r\left(\frac{d+it}{d}\right) \quad \text{ou} \quad r\left(1+\frac{it}{100}\right)$$

$$i = d\left(\frac{a-r}{rt}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{a-r}{rt}\times 100$$

$$t = d\left(\frac{a-r}{ir}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{a-r}{ir}\times 100$$

(Voyez *Intérêt.*)

EXPOSANS (*principes du calcul des*).

1°. $aaabbcc = a^3\,b^2\,c^2$

2°. $a^{\pm m} = \frac{1}{a^{\mp m}}$

3°. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

4°. $a^{\frac{m}{n}} = \frac{a^{mp}}{a^{np}}$

Multiplication.

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}\,;\quad a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$$

$$= a^{\frac{mq+np}{nq}}$$

Digitized by Google

$$a^m \times a^n = a^{m+n};\ a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n};$$

Division.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \text{ (si } n = m \text{ on a } a^0 = 1);$$

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{n-m};\ \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n};$$

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$$

FACTEURS.

TABLE *de facteurs usuels* : p *désigne la circonférence d'un cercle dont le diamètre est* 1.

$p =$ 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651328230664709384 46 +

$2p$.... 6.28318530717958647692528676655900

$4p$....12.56637061435917295385057353311800

$\frac{1}{2}p$.... 1.57079632679489661923132169163900

$\frac{1}{4}p$.... 0.78539816339744830961566084581950

$\frac{1}{5}p$.... 4.18879020478639098461685784437200

$\frac{1}{6}p$.... 0.52359877559829887307710723054600

$\frac{1}{8}p$.... 0.39269908169872415480783042290000

$\frac{1}{12}p$.... 0.26179938779914943653855361527300

$\frac{1}{100}p$.... 0.00872664625997164788461845384200

$\frac{1}{p}$ 0.31830988618379067153776752674500

$\frac{2}{p}$ 0.63661977236758134307553505349000

Digitized by Google

$\frac{4}{p}$ 1.273239544735162686151070106980

$\frac{1}{4p}$ 0.079577471545947667884441881686 2

$\sqrt{2}$ .... 1.414213562373095048801688724209 7 environ

$\sqrt{\frac{1}{2}}$ 0.707106781186547524400844362104

$p\sqrt{2}$ 4.442882938158366247015880990060 5

$p\sqrt{\frac{1}{2}}$ 2.221441469079183123507940495030 2

$\frac{1}{p}\sqrt{\frac{1}{2}}$ 0.225079079039276517388799775 1

$\frac{1}{p}\sqrt{2}$ 0.450158158078553034777599595 5

$\sqrt{p}$ 1.772453850905516027298167483341

$\frac{1}{2}\sqrt{p}$ 0.886226925452758013649083741670

$2\sqrt{p}$ 3.544907701811032054596334966682

$\sqrt{\frac{p}{2}}$ 1.253314137315500251207882642402

$\sqrt{\frac{2}{p}}$ 0.797884560802865355879892119868

$\sqrt{\frac{1}{p}}$ 0.564189583547756286948079451560

$2\sqrt{\frac{1}{p}} = 1.128379167095512573896158903120$

$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{p}}$ 0.282094791773878143474039725780

p^2 .... 9.869604401089358618834490999876

$\frac{1}{p^2}$ 0.101321183642337771443879463209

$\frac{1}{2p^2}$ 0.050660591821168885721939731604

$\frac{1}{6p^2}$ 0.016886863940389628573099710534

$2\sqrt{\frac{1}{p}}$ 1.128379167095512573896158903120

Digitized by Google

$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{p}}$... 0.094031597257959381158013241926

$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{p}}$... 0.070523697943469535868509931445

$\frac{1}{6p}$.... 0.053051647697298445256294587790

$\frac{360}{p}$.. 114.591559026164641753596309628200

$\frac{2}{9}p$.... 2.094395102393195492308428922186

$\frac{p}{24}$.... 0.130899693899574718269276807636

$\frac{6}{p}$.... 1.909859317102744029226605160470

$\sqrt[3]{\frac{6}{p}}$... 1.240700981 9 etc.

$6p^2$.. 59.217626406536151713006945999256

$\sqrt{6p^2}$.. 3.897777077 etc.

$36p$.. 113.097335529233556584655161798602

$\sqrt[3]{36p}$.. 4.835975862 04 etc.

$\frac{1}{2}\sqrt{p}$... 0.221556731363189503412270935418

$\frac{1}{2p}$.... 0.159154943091895335768883763372

$\sqrt[3]{\frac{p}{6}}$... 0.805995977007 etc.

$\sqrt{231}$. 15.198684153570 6636

$\sqrt{282}$. 16.792855623746 6 + etc.

$\sqrt{10152}$.. 100.76713374

$\sqrt{\frac{282}{2853 98 \text{ etc.}}} = 18.948708$ etc.

$\sqrt{277.274} = 16.651546474 74$

HYPERBOLE. (Voyez *Équation*.)

INTÉRÊT. C'est le *loyer* d'un capital prêté.

Soit le capital a, le nombre (arbitraire mais communément 100) sur lequel on suppose que se

Digitized by Google

tire l'intérêt d, l'intérêt qui se tire sur ce nombre i, le temps que le capital a été gardé t, ce qui revient tant en capital qu'en intérêt au bout du temps supposé r, ce qui revient en intérêt seulement x, on a ces relations

$$r = a\left(\frac{d+it}{d}\right) \quad \text{ou} \quad a\left(1+\frac{it}{100}\right)$$

$$a = r\left(\frac{d}{d+it}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{100r}{100+it}$$

$$i = d\left(\frac{r-a}{at}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{r-a}{at}\times 100$$

$$t = d\left(\frac{r-a}{ai}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{r-a}{ai}\times 100$$

$$x = \frac{ati}{d} \quad \text{ou} \quad \frac{ati}{100}$$

Intérêt composé. Les mêmes lettres désignant les mêmes choses, pour plus de brièveté on fait

$$p = \frac{d+i}{d}$$

$$r = ap^t \text{ ou } \log r = \log a + (\log p)\times t$$

$$a = \frac{r}{p^t} \text{ ou } \log a = \log r - (\log p)\times t$$

$$p = \sqrt[t]{\frac{a}{r}} \text{ ou } \log p = \frac{(\log r)-(\log a)}{t}$$

$$t = \frac{(\log r)-(\log a)}{(\log p)}$$

Digitized by Google

TABLE *indiquant l'accroissement depuis un an jusqu'à cinquante ans, et année par année, d'une somme de* 1000 *fr., placée à l'intérêt composé de* 2, 3, 4, 5 *et* 6 *pour* 100 *par an.*

ANNÉES	2 p. o/o	3 p. o/o	4 p. o/o	5 p. o/o	6 p. o/o
1	1020	1030	1040	1050	1060
2	1040,40	1060,90	1081,60	1102,50	1123,60
3	1061,21	1092,73	1124,86	1157,63	1191,02
4	1082,43	1125,51	1169,86	1215,51	1262,48
5	1104,08	1159,27	1216,65	1276,28	1338,23
6	1126,16	1194,05	1265,32	1340,10	1418,52
7	1148,69	1229,87	1315,93	1407,10	1503,63
8	1171,66	1266,77	1368,57	1477,46	1593,85
9	1195,09	1304,77	1423,31	1551,33	1689,48
10	1218,99	1343,92	1480,24	1628,89	1790,85
11	1243,37	1384,23	1539,45	1710,34	1898,30
12	1268,24	1425,76	1601,03	1795,86	2012,20
13	1293,61	1468,53	1665,07	1885,65	2132,93
14	1319,48	1512,59	1731,68	1979,93	2260,90
15	1345,87	1557,97	1800,94	2078,93	2396,56
16	1372,79	1604,71	1872,98	2182,87	2540,35
17	1400,24	1652,85	1947,90	2292,02	2692,77
18	1428,25	1702,43	2025,82	2406,62	2854,34
19	1456,81	1753,51	2106,85	2526,95	3025,60
20	1485,95	1806,11	2191,12	2653,30	3207,14
21	1515,67	1860,29	2278,77	2785,96	3399,56
22	1545,98	1916,10	2369,92	2925,26	3603,54
23	1576,90	1973,59	2464,72	3071,52	3819,75
24	1608,44	2032,79	2563,30	3225,10	4048,93
25	1640,61	2093,78	2665,84	3386,35	4291,87
26	1673,42	2156,59	2772,47	3555,67	4549,38
27	1706,89	2221,29	2883,37	3733,46	4822,35

Digitized by Google

Suite de la Table.

ANNÉES	2 p. o/o	3 p. o/o	4 p. o/o	5 p. o/o	6 p. o/o
28	1741,02	2287,93	2998,70	3920,13	5111,69
29	1775,84	2356,57	3118,65	4116,14	5418,39
30	1811,36	2427,26	3243,40	4321,94	5743,49
31	1847,59	2500,08	3373,13	4538,04	6088,10
32	1884,54	2575,08	3508,06	4764,94	6453,39
33	1922,23	2652,34	3648,38	5003,19	6840,59
34	1960,68	2731,91	3794,32	5253,35	7251,03
35	1999,89	2813,86	3946,09	5516,02	7686,09
36	2039,89	2898,28	4103,93	5791,82	8147,25
37	2080,69	2985,23	4268,09	6081,41	8636,09
38	2122,30	3074,78	4438,81	6385,48	9154,25
39	2164,74	3167,03	4616,37	6704,75	9703,51
40	2208,04	3262,04	4801,02	7039,99	10285,72
41	2252,20	3359,90	4993,06	7391,99	10902,86
42	2297,24	3460,70	5192,78	7761,59	11557,03
43	2343,19	3564,52	5400,50	8149,67	12250,45
44	2390,05	3671,45	5616,52	8557,15	12985,48
45	2437,85	3781,60	5841,18	8985,01	13764,61
46	2486,61	3895,04	6074,82	9434,26	14590,49
47	2536,34	4011,90	6317,82	9905,97	15465,92
48	2587,07	4132,25	6570,53	10401,27	16393,87
49	2638,81	4256,22	6833,35	10921,33	17377,50
50	2691,59	4383,91	7106,68	11467,40	18420,15

MESURE (Voyez *Rapport*).

NUMÉRATION. Étant donné un nombre exprimé dans un système dont la *base*, c'est-à-dire le nombre de caractères employés, est n, on le traduira dans le système décimal au moyen de la formule suivante : soit $b\,c\,d\,e\,f$ les chiffres de ce nombre, il sera exprimé dans le système usuel par $b \times n^4 + c \times n^3 + d \times n^2$

Digitized by Google

$+e \times n + f$, et ainsi des autres. Ce qui revient (et cette méthode est plus commode) à

$$\Big[\Big[(bn+c)\,n+d\Big]n+e\Big]n+f.$$

Réciproquement étant donné un nombre dans le système décimal, on le traduira dans celui dont la base est n, en divisant le nombre tel qu'il est donné par n, on divise de nouveau le quotient par n, puis ce deuxième quotient encore par n, jusqu'à ce qu'on tombe sur un quotient moindre que n. La série des restes est celle des chiffres cherchés ; le dernier quotient est le chiffre de l'ordre le plus élevé ; le dernier reste est le second chiffre ; l'avant-dernier reste est le troisième, et le premier reste est le dernier chiffre ; bien que ce reste soit quelquefois 0, il est évident qu'il doit occuper sa place dans la série.

Ainsi (20313) base $4 = (567)$ base 10
(4010) base $5 = (505)$ base 10
(5035) base $10 = (35151$ base $6 =$
(6814) base 9.

NORMALE (*Équation de la*) dans la parabole ; xy étant les coordonnées de la courbe, x' y' celles du point par lequel passe la normale, p étant le demi-par mètre, on a

$$(y-y')\,p \times (x-x')\,y' = o$$

Dans l'ellipse, a étant le demi-grand axe, b le demi-petit axe, x, y, x', y' désignant les mêmes choses que dans la parabole

$$y - y' = \frac{a^2\,y'}{b^2\,x'}(x-x')$$

dans l'hyperbole

$$y - y' = -\frac{a^2\,y'}{b^2\,x'}(x-x')$$

Digitized by Google

PARABOLE. (Voyez *Équation.*)

PARALLÉLIPIPÈDE. B = base, H = hauteur, V = volume, on a

$$V = B \times H$$

PARALLÉLOGRAMME. B étant la base; H la hauteur, A l'aire, on a

$$A = B \times H$$

PERMUTATIONS. Le nombre de permutations de m, choses permutées p à p, nombre que nous désignerons par $(m\,\mathrm{P}\,p)$, s'obtient par

$$(m\,\mathrm{P}\,p) = m(m-1)(m-2)\ldots\ldots \times (m-p+1)$$

s'il y a répétition

$$(m\,\mathrm{P}\,p) = m^p$$

POLYGONE. a étant le côté d'un polygone régulier inscrit, x celui d'un polygone régulier inscrit dont le nombre de côtés est double, z le rayon du cercle inscrit dans le premier, R le rayon du cercle circonscrit à l'un et à l'autre, on a ces relations

$$x^2 = 2\,\mathrm{R}(\mathrm{R}-z) \text{ et } z^2 = \mathrm{R}^2 - \tfrac{1}{4}a^2.$$

y étant le côté d'un polygone régulier circonscrit, a le côté d'un polygone régulier inscrit d'un même nombre de côtés, R le rayon du cercle inscrit dans le premier polygone ou circonscrit au second, z le rayon du cercle inscrit dans le second, on a

$$y = \frac{a\,\mathrm{R}}{z} \text{ et } z^2 = \mathrm{R}^2 - \tfrac{1}{4}\,a^2$$

Et généralement a étant le côté d'un polygone inscrit d'un nombre de côtés n, on a, pour les demi-périmètres de ce polygone et de celui qui est circonscrit semblable, d'une part,

$\frac{1}{2}\,an$, et de l'autre

Digitized by Google

$$\frac{\frac{1}{2}\,an}{\sqrt{\left[(1+\frac{1}{2}a)(1-\frac{1}{2}a)\right]}}$$

Étant donné le côté a *d'un polygone régulier, trouver le rayon* R *du cercle qui lui est circonscrit.*

La table suivante et la formule $R = af$ résolvent ce problème.

NOMBRE de côtés.	ARC dont le côté du polygone est la corde.	VALEURS de f corresp.	VALEURS de c corresp.
3	120°	0.5773503	1.732051
4	90	0.7071068	1.414214
5	72	0.8506508	1.175570
6	60	1.000000	1.000000
7	51 $\frac{3}{7}$	1.1523824	0.867767
8	45	1.3065628	0.765367
9	40	1.4619022	0.684040
10	36	1.6180340	0.618034
11	32 $\frac{8}{11}$	1.7747324	0.563465
12	30	1.9318517	0.517638

Veut-on connaître, par exemple, le rayon du cercle circonscrit à l'octogone dont le côté est 12, on a

$$R = 12 \times 1.3065628 = 15.66.....$$

Cette table, et la formule $c\,R = a$, peuvent encore servir à résoudre le problème inverse.

Étant donné le rayon R *d'un cercle, trouver le côté* a *d'un polygone régulier* (de moins de 12 côtés) *qui lui est inscrit.*

Digitized by Google

Soit par exemple 5 le rayon d'un cercle, on aurait pour le côté du triangle équilatéral inscrit

$$5 \times 1.732051 = 8.66.....$$

PROGRESSION *par différence*. Le premier terme est a, la différence d, le nombre des termes n, le dernier u et la somme s, on trouvera deux de ces quantités connaissant les trois autres au moyen des formules suivantes :

Trouver a.

Connaissant

$n.d.u \quad a = u - d(n-1)$

$n.u.s \quad a = \dfrac{2s - un}{n}$

$n.d.s \quad a = \dfrac{2s - dn(n-1)}{2n}$

$u.d.s \quad a = \dfrac{d \pm \sqrt{\left[(n2+d)^2 + 8ds\right]}}{2}$

Trouver u.

Connaissant

$a.d.n \quad u = a + d(n-1)$

$a.n.s \quad u = \dfrac{2s - an}{n}$

$d.n.s \quad u = \dfrac{2s + dn(n-1)}{2n}$

$a.d.s \quad u = \dfrac{d \pm \sqrt{\left[(2a-d)^2 + 8ds\right]}}{2}$

Digitized by Google

Trouver n.

Connaissant

$a.u.d \quad n = 1 + \frac{u - a}{d}$

$a.u.s \quad n = \frac{2s}{a + u}$

$a.d.s \quad n = \frac{d - 2a \pm \sqrt{[(2a - d)^2 + 8ds]}}{2d}$

$u.d.s \quad n = \frac{2u + d \pm \sqrt{[(2u + d)^2 - 8ds]}}{2d}$

Trouver d.

Connaissant

$a.u.n \quad d = \frac{u - a}{n - 1}$

$a.n.s \quad d = \frac{u^2 - a^2}{2s - a - u}$

$a.u.s \quad d = \frac{2s - 2an}{n(n - 1)}$

$u.n.s \quad d = \frac{2un - 2s}{n(n - 1)}$

Trouver s.

Connaissant

$a.u.n \quad s = \frac{(a + u)n}{2}$

$a.u.d \quad s = \frac{(a + u)(u - a + d)}{2d}$

Digitized by Google

$a.n.d \quad s = \frac{2an + dn(n-1)}{2}$

$u.n.d \quad s = \frac{2un - dn(n-1)}{2}$

Progression par quotient. Connaissant trois de ces cinq quantités, le plus petit terme a, le plus grand u, le nombre des termes n, la somme des termes s et le quotient q, trouver les deux autres.

Trouver a.

Connaissant

$u.q.n \quad a = \frac{u}{q^{n-1}}$ ou $\log a = \log u - (n-1) \times \log q$

$u.q.s \quad a = uq + s - q$ ou $\log(s-a) = \log q + \log(s-u)$

$q.n.s \quad a = \frac{s(q-1)}{q^n - 1}$ ou

$\log a = \log s + \log(q-1) - \log(q^n - 1)$

$u.n.s \quad a \times (s-a)^{n-1} - u \times (s-u)^{n-1} = 0$

Trouver u.

Connaissant

$a.q.n \quad u = aq^{n-1}$; $\log u = \log a + (n-1) \times \log q$

$a.q.s \quad u = \frac{sq - s + a}{q}$ ou $\log(s-u) = \log(s-a) - \log q$

Digitized by Google

$q.n.s \quad u = \frac{s\,q^{n-1}(q-1)}{q^n-1}$ ou $\log u = \log s + (n-1)\log q + \log(q-1) - \log(q^n-1)$

$a.n.s \quad u(s-u)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = o$

Trouver q.

Connaissant

$a.u.n \quad q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ ou $\log q = \frac{\log u - \log a}{n-1}$

$a.u.s \quad q = \frac{s-a}{s-u}$ ou $\log q = \log(s-a) - \log(s-u)$

$a.n.s \quad aq^n - sq + s - a = o$

$u.n.s \quad q^n - \frac{sq^{n-1}}{s-u} + \frac{u}{s-u} = o$

Trouver n.

Connaissant

$a.u.q \quad n = 1 + \frac{\log u - \log a}{\log q}$

$a.u.s \quad n = 1 + \frac{\log u - \log a}{\log(s-a) - \log(s-u)}$

$a.q.s \quad n = \frac{\log(a + sq - s) - \log a}{\log q}$

$u.q.s \quad n = 1 + \frac{\log u - \log(s - sq + uq)}{\log q}$

Digitized by Google

Trouver s.

Connaissant

$a.u.q \quad s = \dfrac{uq - a}{q - 1}$ ou $\log s = \log(uq - a) - \log(q - 1)$

$$a.u.n \quad S = \frac{\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{a}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}$$

on calculera séparément,

$1°.u\sqrt[n-1]{u} \quad 2°.a\sqrt[n-1]{a} \quad 3°.\sqrt[n-1]{u}$

$4°.\sqrt[n-1]{a}$

par les formules particulières,

$$1°.\log u\sqrt[n-1]{u} = \log u + \frac{\log u}{n-1}$$

$$2°.\log a\sqrt[n-1]{a} = \log a + \frac{\log a}{n-1}$$

$$3°.\log\sqrt[n-1]{u} = \frac{\log u}{n-1}$$

$$4°.\log\sqrt[n-1]{a} = \frac{\log a}{n-1}$$

Digitized by Google

$a.\ n.$ $S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ ou $\log S = \log a + \log(q - 1) - \log(q - 1)$

$u.\ n.\ q$ $S = \frac{u(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)}$ ou $\log S = \log u + \log(q^n - 1) - \log q^{n-1} - \log(q - 1)$

Ces formules s'appliquent aux progressions décroissantes en regardant a comme le petit terme, u comme le plus grand, q comme le quotient du plus grand des deux termes conséqutifs, divisé par le plus petit.

PRISME. V est le volume, B la base, H la hauteur.

$$V = B \times H$$

PUISSANCE. Table des neuf premières puissances des neuf premiers nombres.

Digitized by Google

PUISSANCE. — *Table des neuf premières puissances des neuf premiers nombres.*

1re.	2me.	3me.	4me.	5me.	6me.	7me.	8me.	9me.
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

Digitized by Google

PYRAMIDE. V est le volume, B la base, H la hauteur,

$$V = \tfrac{1}{3} B \times H$$

Pyramide (tronc de). A B étant les bases de ce tronc, H sa hauteur, le volume V est

$$V = \tfrac{1}{3} H (A + B + \sqrt{AB})$$

QUADRILATÈRE. Soit A l'aire d'un quadrilatère dont d et d' sont les diagonales, et α l'angle qu'elles forment entre elles.

$$A = \tfrac{1}{2} d d' \sin \alpha$$

RADICAUX. En général on a 1°. pour l'addition ou la soustraction

$$\pm m \sqrt[n]{a} \pm p \sqrt[n]{a} \pm q \sqrt[n]{a} \ldots = (\pm m \pm p \pm q) \sqrt[n]{a}$$

2°. Pour la multiplication ou la division.

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab} \text{ et } \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

3°. Pour les réductions.

$$\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{pn}}$$

par conséquent

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n b^n}$$

$$\text{et } \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}} = \sqrt[mn]{a^n b^{-m}}$$

4°. Pour l'élévation aux diverses puissances, on a

Digitized by Google

$$(\sqrt[m]{a})^n = \sqrt[m]{a^n}$$

et pour l'extraction des racines

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

et lorsqu'on voudra faire entrer sous le radical *le signe* qui le précède, on se rappellera le principe suivant

$$\pm b\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{\pm a\, b^m}$$

Cet autre principe pourra servir à simplifier quelquefois le calcul.

$$\sqrt[m]{a^{m+n}} = a\sqrt[m]{a^n}$$

RAPPORT DE QUELQUES MESURES ANCIENNES ET NOUVELLES.

Un mètre = 0.513074 toises = a $\log a = \overline{1},7101800$
Un mètre = 3 pieds, 078444 = b $\log b = 0,4883313$
Une toise = 1.949037 mètres = c $\log c = 0,2898200$
Un pied = 0.324804 mèt. = d $\log d = \overline{1},5116627$

M mètres = $(a \times M)$ toises = $(b \times M)$ pieds.
T toises = $(c \times T)$ mètres.
P pieds = $(d \times P)$ mètres.

Un are = 26.3245 toises carrées $\log = 1,4203600$
Un hectare = 2.924943 arpens $\log = 0,4661175$
Une toise car. = 3.798744 mèt. car. $\log = 0,5796400$
Un pied carré = 10.552 décimètres carrés.
Une toise cub. = 7.40389 mèt. cub. $\log = 0,8694598$
Une livre = 4.8951 hecto. = h $\log h = 0,6897614$
Un kilog. = 2,04286 livr. = l $\log l = 0,3102386$

L livres = $(h \times L)$ hecto.
K kilog. = $(l \times K)$ livres.

Rapport de la circonférence au diamètre. (Voyez *Circonférence.*)

RENCONTRE de deux droites $y = ax + b$ $y' = a'x + b'$.

Digitized by Google

Les coordonnées de ce point sont

$$x = \frac{b' - b}{a - a'} \qquad y = \frac{ab' - a'b}{a - a'}$$

SECTEUR. Segment de cercle. R est le rayon, α l'angle qui détermine le secteur et le segment correspondant exprimé en degrés et fractions de degrés

l'aire du secteur $= \frac{1}{2} R \times \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$

aire du segment $= \frac{1}{2} R \left(\frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right)$

SINUS. Valeur du sinus d'un arc dont la longueur est α (ne point confondre ici la longueur avec le nombre de degrés, voyez *Arc*) dans le cercle dont le rayon est 1.

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{2 \times 3} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots$$

SOUS-NORMALE, SOUS-TANGENTE dans la parabole. x' étant l'abscisse du point par lequel passe la normale, p étant le demi-paramètre.

Longueur de la sous-tangente $= 2x'$.

Longueur de la sous-normale $= p$.

Dans l'ellipse, a étant toujours le $\frac{1}{2}$ grand axe, b le demi-petit axe et x' l'abscisse du point par lequel passe la normale, on a

Longueur de la sous-tangente $\frac{a^2 - x'^2}{x'}$

Longueur de la sous-normale $\frac{b^2 x'}{a^2}$

Dans l'hyperbole

sous-tangente $= \frac{x'^2 - a^2}{x'}$

Digitized by Google

sous-normale $= \frac{b^2 x'}{a^2}$

SPHÈRE. A est l'aire, V le volume, R le rayon, D le diamètre.

$$A = 4\pi R^2 = R^2 \times 12.566370614$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = R^3 \times 4.188790204$$
$$= \frac{1}{6}\pi D^3 = D^3 \times 0.523598775$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{\pi}} = 0{,}282095 \times \sqrt{A}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0{,}620350 \sqrt[3]{V}$$

TANGENTE (Équation de la). Dans les sections coniques $x\,y$ sont les coordonnées de la courbe, $x'\,y'$ celles du point de tangence, p le demi-paramètre, on a pour la parabole

$$y\,y' = p\,(x + x')$$

Les appellations demeurant les mêmes et a étant le demi-grand axe, b le demi-petit axe, on a pour la tangente à l'ellipse

$$a^2\,y\,y' + b^2\,x\,x' = a^2\,b^2$$

L'équation de la tangente à l'hyperbole est

$$a^2\,y\,y' - b^2\,x\,x' = -a^2\,b^2$$

TRAPÈZE. A son aire, h la distance des bases parallèles B, b, on a

$$A = \frac{1}{2}\,h\,(B + b)$$

Ou si $a.b.c.d$ sont les quatre côtés du trapèze, b et d étant les deux bases ou côtés parallèles, et h leur distance ou la hauteur du trapèze, on a

$$A = \left(\frac{b + d}{2}\right) h$$

Digitized by Google

et si g est la différence des deux bases

$$h = \frac{1}{2g}\sqrt{(a+c+g)(a+g-c)(c+g-a)(a+e-g)}$$

TRIANGLE. A son aire, b sa base, h sa hauteur.

$$A = \frac{1}{2} b h, b$$

Si l'on connaît les trois côtés $\alpha + \beta + \gamma = 2p$, ou p étant la demi-somme des trois côtés, on a

$$A = \sqrt{p(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)}$$

(Voyez *Trigonométrie*).

TRIGONOMÉTRIE. Généralités.

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$$

$$\sec^2 a = \tang^2 a + 1$$

$$\tang a = \frac{\sin a}{\cos a}$$

$$\sec a = \frac{1}{\cos a}$$

$$\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$$

$$\cosec a = \frac{1}{\sin a}$$

$$\tang a \cot a = 1$$

$$\cosec^2 a = 1 + \cot^2 a$$

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{(1 + \tang^2 a)}}$$

$$\sin a = \frac{\tang a}{\sqrt{(1 + \tang^2 a)}}$$

$$\text{sin-verse } a = 1 - \cos a = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a$$

$\sin o = o \quad \cos o = R =$ le rayon

$\tang o = o \quad \sec o = R \quad \cot o = \infty =$ l'infini

$\sin 1$ quadrant $= R \quad \cos 1$ quad $= o$

$\tang 1$ quad $= \infty = \sec 1$ quad, $\cot 1$ quad $= o$

Digitized by Google

Pour un arc de

1 quad $+ a$ le sin $=$ cos a, le cos $=-$ sin a, la tang $=-$ cot a
2 quad $+ a$ le sin $=-$ sin a, le cos $=-$ cos a, la tang $=$ tang a
3 quad $+ a$ le sin $=-$ cos a, le cos $=$ sin a, la tang $=-$ cot a

$$\sin \tfrac{1}{1}\, q = \tfrac{1}{2} R,\ \cos \tfrac{1}{1}\, q = \tfrac{1}{2} R \sqrt{3},\ \tang \tfrac{1}{1}\, q = \frac{R}{\sqrt{3}},\ \cot \tfrac{1}{1}\, q = R \sqrt{3}$$

$$\sin \tfrac{2}{1}\, q = \tfrac{1}{2} R \sqrt{3},\ \cos \tfrac{2}{1}\, q = \tfrac{1}{2} R,\ \tang \tfrac{2}{1}\, q = R \sqrt{3},\ \cot \tfrac{1}{1}\, q = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

$$\tang 45° = R = \cot 45°,\ \cos 45° = \tfrac{1}{2} R \sqrt{2} = \sin 45°$$

$$\tang 135° = -R = \cot 135°,\ \sin 135° = \tfrac{1}{2} R \sqrt{2} = -\cos 135°$$

Valeurs des sinus et cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs α, β.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \sin\beta \cos\alpha$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$$

Valeurs du sinus et du cosinus du double de l'arc α.

$$\sin(2\alpha) = \sin\alpha \cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Valeurs du sinus et du cosinus de la moitié d'un arc α.

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)} \qquad \cos \tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)}$$

Digitized by Google

Valeur de la tangente de la somme ou de la différence de deux arcs α et β.

$$\text{tang}(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tang}\,\alpha \pm \text{tang}\,\beta}{1 \mp \text{tang}\,\alpha\,\text{tang}\,\beta}$$

on a pour la tangente du double de l'arc α

$$\text{tang}(2\alpha) = \frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1 - \text{tang}^2\alpha}$$

et pour celle de la moitié de l'arc α

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}\right)} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

enfin

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\text{tang}\,\tfrac{1}{2}(\alpha - \beta)}$$

Résolution des triangles rectilignes rectangles.

A est l'angle droit, B, C les angles aigus, a l'hypoténuse, b, c les côtés opposés aux angles aigus, le rayon étant 1, on a

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b = a\cos C$$
$$c = b\,\text{tang}\,C$$

Résolution des triangles obliquangles.

A B C désignant toujours les trois angles, a b c les côtés qui leur sont opposés.

Étant donnés a B C, on obtient

A par $A = 180 - (B + C)$

$$b = \frac{a\sin B}{\sin A}$$

$$c = \frac{a\sin C}{\sin A}$$

Digitized by Google

Étant donnés $c\,a\,A$

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a} \qquad B = 180 - (A + C)$$

$$\text{enfin } b = \frac{a \sin B}{\sin A}$$

Comme sin C répond à deux arcs, on pourrait être embarrassé pour savoir lequel de ces arcs convient au cas dont il s'agit, or

$$\text{si } A > 90^\circ \text{ et } a > c, \text{ on a } C < 90^\circ$$

Étant donnés $b\,c\,A$, on cherchera d'abord la valeur de $\frac{1}{2}(C - B)$ que nous appelons n, au moyen de l'équation.

$$\text{tang } n = \frac{c - b}{c + b} \cot \tfrac{1}{2} A$$

De cette valeur on tirera celle de $\frac{1}{2}(C + B)$ que nous nommerons m, au moyen de

$$\tfrac{1}{2}(C + B) = 90^\circ - \tfrac{1}{2} A$$

et l'on aura

$$C = m + n \text{ et } B = m - n$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B} \qquad \text{ou} = \frac{c \sin A}{\sin C}$$

Etant donnés $a.\ b.\ c$

$$\text{on cherchera } p = \frac{a + b + c}{2}$$

et l'on déduira A de

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left[\frac{(p - b)(p - c)}{b\,c}\right]}$$

$\frac{1}{2} A$ est toujours $< 90^\circ$

$$\sin C = \frac{c \sin A}{a}$$

$$B = 180 - (A + C)$$

Digitized by Google

Si le triangle est isoscèle, A étant l'angle du sommet et a la base ; comme $b = c$ la valeur de $\sin \frac{1}{2}$, A devient

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \frac{(p - b)}{b} \text{ puis}$$

$$B = C = 90° - \tfrac{1}{2} A.$$

Trigonométrie sphérique.

Soient A. B. C les angles et $a\ b\ c$ les côtés d'un triangle sphérique, on a toujours

$$a + b + c < 360° \text{ et}$$

$$A + B + C < 6 \times 90° \text{ et} > 2 \times 90°$$

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$$
$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$$
$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cot C$$

on a aussi

$$-\cos C = \cos A \cos B - \sin A \sin B \cos c$$
$$\sin a \cos c = \sin c \cos a \cos B + \sin b \cos C$$
$$\sin a \cot c = \cos a \cos B + \sin B \cot C$$

Résolution des triangles sphériques rectangles.

C étant l'angle droit, selon qu'on aura telles ou telles autres parties du triangle, on le résoudra complétement au moyen des équations suivantes :

$$\sin b = \sin c \sin B$$
$$\cos c = \cos a \cos b$$
$$\cos c = \cot A \cot B$$
$$\tang a = \tang c \cos B$$
$$\tang b = \tang B \sin a$$
$$\cos A = \cos a \sin B$$

Résolution des triangles sphériques obliquangles.

I. Étant donnés $a.\ b.\ c$, trouver A. B. C.

Digitized by Google

Faisons $p = \frac{a+b+c}{2}$ on aura

C par l'une des trois relations,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a \sin b}$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}$$

$$\operatorname{tang}^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin(p-a)\sin(b-b)}{\sin p \sin(p-c)}$$

On cherchera alors une valeur auxiliaire k au moyen de

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} k = \operatorname{tang} \tfrac{1}{2}(a+b) \operatorname{tang}^{-1} \tfrac{1}{2}(a-b) \cot \tfrac{1}{2} c$$

Cette valeur donnera ces autres valeurs auxiliaires $\frac{1}{2}(c+k)$, $\frac{1}{2}(c-k)$ que nous appelons la première t et la seconde s, et l'on obtiendra A et B par

$$\cos A = \operatorname{tang} s \cot b$$
$$\cos B = \operatorname{tang} t \cot a$$

II. Étant donnés A. B. C, trouver c.

Faisant $k = \frac{A+B+C}{2}$ on a

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} c = \frac{\cos(k-A)\cos(k-B)}{\sin A \sin B}$$

III. Étant donnés a c et l'angle compris B, on aura le côté b opposé à B par

$$\cos b = \frac{\cos c}{\cos \varphi} \times \cos(a-\varphi)$$

φ étant un angle auxiliaire qu'on déterminera d'abord par

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} c \cos B$$

C s'obtiendra par

Digitized by Google

$$\cot C = \frac{\cot B}{\sin \varphi} \times \sin(a - \varphi)$$

Ou bien les équations suivantes donneront à la fois et C

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A + C) = \cot \tfrac{1}{2} B \times \frac{\cos \tfrac{1}{2}(a - c)}{\cos \tfrac{1}{2}(a + c)}$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2}(A - C) = \cot \tfrac{1}{2} B \times \frac{\sin \tfrac{1}{2}(a - c)}{\sin \tfrac{1}{2}(a + c)}$$

IV. Étant donnés B. C et le côté compris a, le côté c opposé à C sera donné par

$$\cot c = \frac{\cot a}{\cos \varphi} \times \cos(B - \varphi)$$

φ étant comme ci-dessus un angle auxiliaire qu'on obtient par

$$\cot \varphi = \cos a \text{ tang } C$$

Pour l'angle A opposé au côté donné a, on a d'abord

l'équation auxiliaire $\cot \varphi = \cos a \times \text{tang } B$, puis

$$\cos A = \frac{\cos B}{\sin \varphi} \times \sin(C - \varphi)$$

V. Étant donnés b. c et un angle opposé B, on obtient a par

l'équation auxiliaire $\text{tang } \varphi = \text{tang } c \cos B$, puis

$$\cos(a - \varphi) = \frac{\cos \varphi \cos b}{\cos c}$$

L'angle A formé par b et c, est donné par

$$\cot \varphi = \cos c \text{ tang } B \text{ et}$$
$$\cos(a - \varphi) = \cos \varphi \text{ tang } c \cot b$$

Enfin C se tire de

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}$$

Digitized by Google

VI. Étant donnés B et C et c, on a pour a

$$\text{tang } \varphi = \text{tang } c \cos B$$
$$\sin (a - \varphi) = \sin \varphi \text{ tang } B \cot C$$

pour b on a

$$\sin b = \frac{\sin B \sin c}{\sin C}$$

A s'obtient par

$$\cot \varphi = \cos c \text{ tang } B$$
$$\sin (A - \varphi) = \frac{\sin \varphi \cos C}{\cos B}$$

Triangle isoscèle. B angle du sommet, b la base, a un des deux côtés égaux, A un des deux angles égaux, on obtient tout le reste par

$$\sin \tfrac{1}{2} b = \sin \tfrac{1}{2} B \sin a$$
$$\cos a = \cot \tfrac{1}{2} B \cot A$$
$$\text{tang } \tfrac{1}{2} b = \text{tang } a \cos A$$
$$\cos \tfrac{1}{2} B = \cos \tfrac{1}{2} b \sin A.$$

FIN.

Digitized by Google

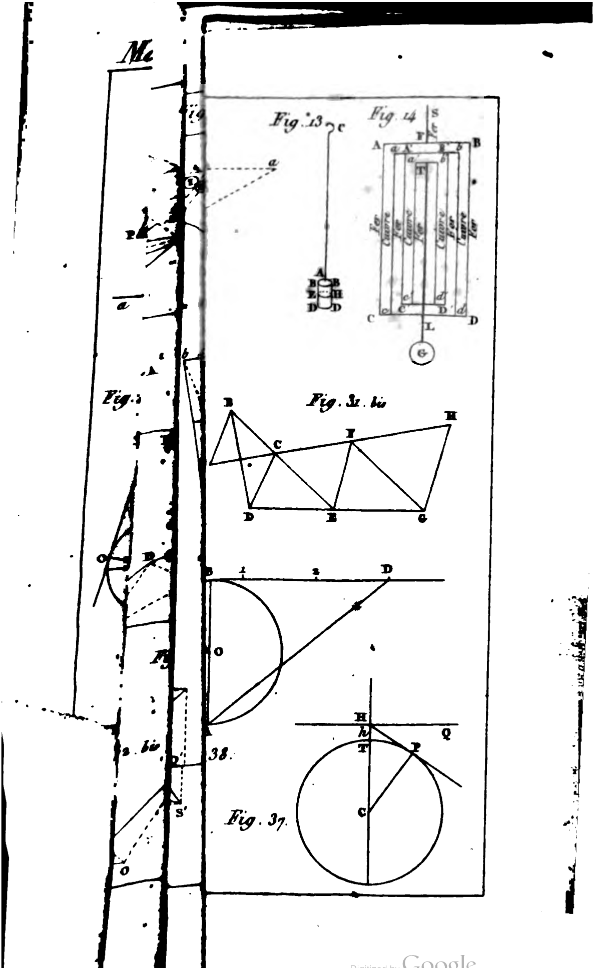


Fig. 13
Fig. 14
Fer
Cuivre
Fig. 31. bis
Fig. 37
38.

Digitized by Google

Google

COLLECTION

DE MANUELS

FORMANT UNE

ENCYCLOPÉDIE

DES SCIENCES ET DES ARTS,

FORMAT IN-18;

Par une réunion de Savans et de Praticiens;

MESSIEURS

BORY DE SAINT-VINCENT, BOITARD, CHORON, le comte DE GRANDPRÉ, HUOT, JULIA-FONTENELLE, LACROIX, LAUNAY, Sébastien LENORMAND, LESSON, PERROT, RIFFAULT, TARBÉ, TERQUEM, VERGNAUD, etc., etc.

Tous les Traités se vendent séparément; pour les recevoir franc de port, il faut ajouter 50 c. par volume.

Cette Collection étant une entreprise toute philanthropique, les personnes qui auraient quelque chose à nous faire parvenir dans l'intérêt des sciences et des arts, sont priées de l'envoyer franc de port à l'adresse de M. le *Directeur de l'Encyclopédie in-18*, chez RORET, libraire, rue Hautefeuille, à Paris.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

BIBLIOTECA CENTRAL
A.51.8
321-
BIBLIOTECA DE CATALU
1001928204
Digitized by Google